

## BÀI SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

**Tên Sáng kiến:** *Một số biện pháp tích cực nâng cao năng lực ứng dụng tư duy thuật giải trong dạy học chủ đề Nguyên hàm Tích phân cho học sinh hệ trung cấp chuyên nghiệp.*

Tên người viết sáng kiến: NGUYỄN THỊ THUY

Chức vụ: Giảng viên

Đơn vị công tác: Khoa khoa học cơ bản

### 1. Đặt vấn đề

Trong bối cảnh cách mạng công nghiệp 4.0 đã và đang diễn ra một cách nhanh chóng, mạnh mẽ, gây tác động sâu sắc đến mọi lĩnh vực của đời sống xã hội. Trong kỷ nguyên số hóa đặt ra những yêu cầu vô cùng cấp bách cho sự nghiệp đổi mới toàn diện giáo dục Việt Nam. Đó là đào tạo những người lao động phát triển toàn diện, có tư duy sáng tạo, có năng lực thực hành giỏi, có khả năng đáp ứng được các yêu cầu của cuộc cách mạng công nghiệp 4.0. Góp phần hình thành ở học sinh những phẩm chất của người lao động trong nền sản xuất tự động hóa như: Tính kỷ luật, tính kế hoạch hóa, tính phê phán và thói quen tự kiểm tra,.. gắn với phát triển nền kinh tế tri thức và xu hướng toàn cầu hóa là nhiệm vụ cấp bách đối với ngành giáo dục nước ta nói chung và của trường Cao Đẳng Lý Tự Trọng Thành phố Hồ Chí Minh nói riêng. Để thực hiện được nhiệm vụ đó thì sự nghiệp giáo dục nghề nghiệp nói chung và của trường Cao Đẳng Lý Tự Trọng nói riêng cần phải được đổi mới một cách toàn diện cả về nội dung lẫn phương pháp dạy học cũng như mô hình nhà trường trong tương lai đó là xây dựng nhà trường thông minh, chuẩn bị sẵn sàng cho hội nhập quốc tế, và phát triển nhà trường trong bối cảnh công nghiệp 4.0. Để làm được điều đó thì vai trò của giáo viên và học sinh cũng sẽ có nhiều thay đổi trong phương pháp dạy học, một trong những việc cần thiết phải thực hiện đó là đổi mới phương pháp dạy học và một trong những phương pháp đó là phương pháp sử dụng tư duy nói chung và tư duy thuật giải nói riêng cho học sinh thông qua hầu hết các hình thức dạy học.

Nội dung nguyên hàm, tích phân là nội dung quan trọng và khó ở chương trình toán trung học phổ thông. Nội dung này có ứng dụng thực tế cao và có những bài toán có tiềm năng có thể chuyển về một thuật giải. Đó là điều kiện thuận lợi nhằm phát triển tư duy thuật giải cho học sinh. Bên cạnh đó chủ đề này thường được đưa vào để vận dụng trong nhiều dạng bài toán khác nhau thông qua các bài tập áp dụng, qua thực tiễn, qua các bài kiểm tra thường xuyên, qua kì thi kết thúc học phần và kì thi tốt nghiệp bậc trung cấp chuyên nghiệp.

Tư duy thuật giải có vai trò quan trọng trong nhà trường phổ thông đặc biệt trong dạy học toán. Trong môn toán, có nhiều dạng toán được giải quyết nhờ thuật giải. Trong thực tế giảng dạy những bài toán, những dạng toán có thuật giải, có qui tắc, có sự phân chia thành các bước để giải thì học sinh dễ tiếp thu lĩnh hội. Thông qua các bước hoạt động, yêu cầu của bài toán được giảm dần phù hợp với khả năng của học sinh, nó là định hướng để học sinh giải bài toán đó. Qua việc tìm tòi thuật giải, qui tắc tựa thuật giải để giải từng bài toán, từng dạng toán, nó thúc đẩy sự phát triển các thao tác trí tuệ khác cho học sinh như: phân tích, tổng hợp, so sánh, khái quát hóa, tương tự hóa, hơn nữa nó còn hình thành cho học sinh những phẩm chất trí tuệ như: tính cẩn thận chi tiết, tính linh hoạt, tính độc lập, sáng tạo,

kích thích sự ham muốn khám phá, các phẩm chất tốt đẹp của người lao động như: tính ngăn nắp, tính cẩn thận, tính kỷ luật, ý thức tìm giải pháp tối ưu khi giải quyết công việc. Mặt khác qua đó từng bước giúp học sinh thích nghi được các yêu cầu của xã hội, của đất nước đang trên con đường công nghiệp hóa, hiện đại hóa đáp ứng yêu cầu của con người trong nền sản xuất tự động hóa và bối cảnh công nghệ, thông tin, tin học đang có ảnh hưởng mạnh mẽ, sâu rộng tới mọi lĩnh vực của cuộc sống.

Ứng dụng và phát triển tư duy thuật giải là một trong những mục đích quan trọng của việc dạy học toán vì: Tư duy thuật giải tạo điều kiện tốt để học sinh tiếp thu kiến thức, rèn luyện các kỹ năng Toán học. Nếu học sinh ứng dụng tư duy thuật giải tốt thì sẽ thúc đẩy cho các thao tác trí tuệ (như: phân tích, tổng hợp, so sánh, trừu tượng hóa, khái quát hóa,...) cũng như những phẩm chất trí tuệ (như: tính linh hoạt, tính độc lập, tính sáng tạo) tốt. Tư duy thuật giải giúp học sinh hình dung được quá trình tự động hóa diễn ra trong những lĩnh vực khác nhau của con người, trong đó có lĩnh vực xử lý thông tin. Điều này làm cho học sinh thích nghi với xã hội tự động hóa, góp phần làm giảm ngăn cách giữa nhà trường và xã hội.

Trong quá trình giảng dạy môn toán ở bậc trung cấp chuyên nghiệp tôi thấy các em học sinh còn lúng túng, gặp một số khó khăn khi giải quyết các bài toán thuộc chủ đề **“Nguyên hàm Tích phân”** trong môn Toán mà một trong các nguyên nhân đó là học sinh chưa có phương pháp học, còn thiếu một số kỹ năng, năng lực ứng dụng tư duy thuật giải cần thiết liên quan đến nội dung này của môn toán. Chính vì vậy tôi đã quyết định chọn đề tài nghiên cứu cho sáng kiến kinh nghiệm của bản thân là **“Một số biện pháp tích cực nâng cao năng lực ứng dụng tư duy thuật giải trong dạy học chủ đề Nguyên hàm Tích phân cho học sinh hệ trung cấp chuyên nghiệp”**.

## 2. Nội dung

### 2.1. Một số khái niệm cơ bản

#### 2.1.1. Khái niệm thuật toán

Thuật toán là một khái niệm cơ sở của Toán học và Tin học. Hiểu một cách đơn giản, thuật toán là một tập các hướng dẫn nhằm thực hiện một công việc nào đó. Đối với việc giải quyết một vấn đề - bài toán thì thuật toán có thể hiểu là một tập ***hữu hạn các hướng dẫn rõ ràng*** để người giải toán có thể theo đó mà giải quyết được vấn đề. Như vậy, thuật toán là một phương pháp thể hiện lời giải của vấn đề - bài toán.

Từ định nghĩa ta thấy thuật toán có các tính chất sau:

- Tính dừng: Thuật toán phải kết thúc sau một số hữu hạn lần thực hiện các thao tác.
- Tính xác định: Sau khi thực hiện một thao tác thì hoặc là thuật toán kết thúc hoặc là có đúng một thao tác xác định để được thực hiện tiếp theo.
- Tính đúng đắn: Sau khi thuật toán kết thúc ta đã nhận được kết quả cần tìm.

#### 2.1.2. Khái niệm thuật giải và quy tắc tựa thuật giải

##### a) ***Khái niệm thuật giải:***

Khái niệm thuật giải người ta đã mở rộng hai tính chất của thuật toán: Tính xác định và tính đúng đắn. Việc mở rộng tính xác định đối với thuật toán được thể hiện qua các thuật giải đệ quy và ngẫu nhiên. Tính đúng đắn của thuật toán không còn bắt buộc đối với một số cách giải bài toán, nhất là cách giải gần đúng. Khái niệm mở rộng này của thuật toán đã mở rộng cho chúng ta trong việc tìm kiếm phương pháp để giải quyết các bài toán được đặt ra. Thuật giải có tất cả các tính chất của thuật toán. Nó cũng có các hình thức biểu diễn phong

phù như thuật toán. Đặc biệt trong dạy học cần chú ý lựa chọn phương tiện biểu diễn phù hợp với trình độ và kiến thức hiện có của học sinh.

### **b) Quy tắc tựa thuật giải**

Quy tắc tựa thuật giải là **một dãy hữu hạn chỉ dẫn thực hiện được theo một trình tự xác định nhằm biến đổi thông tin vào của một lớp bài toán thành thông tin ra mô tả lời giải của lớp bài toán đó.**

Để phân biệt, ta dựa vào các quy tắc tựa thuật giải phân biệt với thuật giải như sau:

- + Mỗi chỉ dẫn trong quy tắc có thể chưa mô tả hành động một cách xác định.
- + Kết quả thực hiện mỗi chỉ dẫn có thể không đơn trị.
- + Quy tắc không bảo đảm chắc chắn rằng sau một số hữu hạn bước thì đem lại kết quả là lời giải của lớp các bài toán.

### **2.1.3. Khái niệm tư duy thuật giải**

Tư duy toán học là hình thức biểu lộ của tư duy biện chứng trong quá trình con người nhận thức khoa học toán học hay thông qua hình thức áp dụng toán học vào các khoa học khác. Như vậy, tư duy toán học là tư duy biện chứng.

*Tư duy thuật giải là một loại hình thức tư duy toán học. Nó là phương thức tư duy biểu thị khả năng tiến hành các hoạt động (Hđ) sau:*

*Hđ1: Thực hiện những thao tác theo một trình tự xác định phù hợp với một thuật giải.*

*Hđ2: Phân tích một quá trình thành những thao tác được thực hiện theo trình tự xác định.*

*Hđ3: Khái quát hóa một quá trình diễn ra trên một số đối tượng riêng lẻ thành một quá trình diễn ra trên một lớp đối tượng.*

*Hđ4: Mô tả chính xác quá trình tiến hành một hoạt động.*

*Hđ5: Phát hiện thuật giải tối ưu để giải quyết bài toán.*

Trong đó, (Hđ1) thể hiện năng lực thực hiện thuật giải, (Hđ2- Hđ5) thể hiện năng lực xây dựng thuật giải. Từ khái niệm về tư duy thuật giải ta thấy rằng để phát triển tư duy thuật giải cho học sinh trong dạy học toán, giáo viên phải tổ chức, điều khiển các hoạt động tư duy thuật giải. Thông qua hoạt động đó giúp học sinh nắm vững, củng cố các quy tắc đồng thời phát triển tư duy thuật giải cho học sinh.

### **2.2. Phương pháp dạy học giải bài tập toán**

Dạy Toán là dạy hoạt động Toán học, giáo viên ngoài việc giảng dạy cho học sinh những kiến thức cơ bản thì bên cạnh đó còn giảng dạy cho học sinh các hoạt động, trong đó hoạt động chủ yếu là hoạt động giải Toán. Giải bài tập Toán mang nhiều chức năng như chức năng giáo dục, chức năng giáo dưỡng, chức năng phát triển tư duy, sáng tạo và chức năng kiểm tra đánh giá. Dạy học giải bài tập Toán được xem là một trong những tình huống điển hình trong dạy học môn Toán. Khối lượng bài tập Toán của hệ trung cấp chuyên nghiệp tương đối hết sức phong phú và đa dạng. **Có một số bài Toán có thuật giải, tuy nhiên bên cạnh đó thì phần lớn là những bài toán chưa có hoặc không có thuật giải.** Đứng trước những bài toán đó, giáo viên gợi ý và hướng dẫn như thế nào để giúp các em học sinh giải được các bài toán đó là một vấn đề quan trọng. Tuy nhiên đây cũng là một vấn đề rất khó khăn bởi vì đề ra được những gợi ý hợp lý, đúng lúc, đúng chỗ còn là nghệ thuật sư phạm, phương pháp giảng dạy của chính người giáo viên.

→ Làm nổi bật + rỗng bài viết

Trong dạy học giải Toán, kỹ năng tìm kiếm lời giải là một trong các kỹ năng quan trọng nhất, mà việc rèn luyện các thao tác tư duy là một thành phần không thể thiếu trong dạy học giải Toán. Trong dạy học giải bài tập toán thường có 4 bước để đi đến lời giải bài toán.

### **Bước 1: Hiểu rõ bài toán:**

Để giải một bài toán, trước hết phải hiểu bài toán và hơn nữa còn phải có hứng thú giải bài toán đó. Vì vậy điều đầu tiên người giáo viên cần chú ý hướng dẫn học sinh giải Toán là khơi gợi trí tò mò, lòng ham muốn giải Toán của các em, giúp các em hiểu bài toán phải giải muốn vậy cần phải: Phân tích giả thiết và kết luận của bài toán: Đây là ẩn, đây là dữ kiện? Đây là điều kiện, yêu cầu của bài toán là gì? kiến thức nào liên quan. Có thể biểu diễn bài toán dưới một dạng khác được không? Như vậy, ngay ở bước “*Hiểu rõ đề Toán*” ta đã thấy được vai trò của các thao tác tư duy trong việc định hướng lời giải.

### **Bước 2: Xây dựng chương trình giải:**

Trong bước thứ 2 này, ta lại thấy vai trò của các thao tác tư duy thể hiện rõ nét hơn qua việc phân tích bài toán đã cho thành nhiều bài toán đơn giản hơn, biến đổi bài toán đã cho, mò mẫm và dự đoán thông qua xét các trường hợp đặc biệt, xét các bài toán tương tự hay khái quát hoá hơn vv... thông qua các kỹ năng sau bằng cách đặt các câu hỏi:

- *Kỹ năng huy động kiến thức có liên quan:*

Em đã gặp bài toán này hay bài này ở dạng hơi khác lần nào chưa? Em có biết một bài nào liên quan không? Một định lý có thể dùng được không?

Thử nhớ lại một bài toán quen thuộc có cùng ẩn hay ẩn số tương tự?.

Có thể sử dụng một bài toán nào đó mà em đã có lần giải rồi hoặc sử dụng kết quả của nó không?.

- *Kỹ năng dự đoán kết quả phải tìm:*

Em có thể nghĩ ra một bài toán có liên quan mà dễ hơn không? Một bài toán tổng quát hơn? Một trường hợp riêng? Một bài toán tương tự? Em có thể giải một phần của bài toán?

Em đã sử dụng mọi dữ kiện chưa? Đã sử dụng hết điều kiện chưa? Đã để ý đến mọi khái niệm chủ yếu trong bài toán chưa?

Hãy giữ lại một phần điều kiện, bỏ qua phần kia, khi đó ẩn được xác định đến chừng mực nào và biến đổi thế nào?

- *Sử dụng phép phân tích đi lên và phép phân tích đi xuống để tìm kiếm hướng giải quyết vấn đề.*

Trong quá trình dạy học nếu giáo viên khai thác triệt để được những gợi ý trên thì sẽ hình thành và phát triển ở học sinh kỹ năng tìm lời giải cho các bài toán. Tuy nhiên để đạt được điều này thì giáo viên phải thực hiện kiên trì tất cả các giờ dạy Toán, đồng thời học sinh phải được tự mình áp dụng vào hoạt động giải Toán của mình.

### **Bước 3: Thực hiện chương trình giải:**

Khi thực hiện chương trình giải hãy kiểm tra lại từng bước. *Em đã thấy rõ ràng là mỗi bước đều đúng chưa? Em có thể chứng minh là nó đúng không?.*

### **Bước 4: Kiểm tra và nghiên cứu lời giải đã tìm được:**

Học sinh thường có thói quen khi đã tìm được lời giải của bài toán thì thoả mãn, ít đi sâu kiểm tra lại lời giải xem có sai lầm thiếu sót gì không, ít quan tâm tới việc nghiên cứu

cải tiến lời giải, khai thác lời giải. Vì vậy trong quá trình dạy học, giáo viên cần chú ý cho học sinh thường xuyên thực hiện các yêu cầu sau:

- Kiểm tra lại kết quả, kiểm tra lại suy luận.
- Xem xét đầy đủ các trường hợp có thể xảy ra của bài toán.
- Tìm cách giải khác của bài toán: Một bài toán thường có nhiều cách giải, học sinh thường có những suy nghĩ khác nhau trước một bài toán nhiều khi độc đáo và sáng tạo. Vì vậy, giáo viên cần lưu ý để phát huy tính sáng tạo của học sinh trong việc tìm lời giải gọn, hay của một bài toán. Tuy nhiên cũng không nên quá thiên về lời giải hay, làm cho học sinh trung bình và yếu kém chán nản.

Tìm cách sử dụng kết quả hay phương pháp giải bài toán này cho một bài toán khác, đề xuất bài toán mới: Có thể yêu cầu này là quá cao đối với học sinh yếu kém, nhưng có thể coi là một phương hướng bồi dưỡng học sinh giỏi. Tuy nhiên, trong một số trường hợp đơn giản, dễ hiểu, giáo viên có thể cho học sinh toàn lớp thấy được việc phân tích lời giải của bài tập toán để áp dụng vào bài toán khác hoặc đề xuất ra bài toán mới.

### **2.3. Rèn luyện năng lực ứng dụng tư duy thuật giải cho học sinh thông qua việc giải bài tập toán.**

*a) Rèn luyện năng lực thực hiện những thao tác theo một trình tự xác định phù hợp với một thuật giải:*

Để có thể rèn luyện năng lực này cho học sinh thì cần lưu ý cho giáo viên về những điều sau:

- Các học sinh hầu hết đều nắm vững phương pháp giải, cách giải cụ thể cho bài toán hay lớp bài toán đó.
- Để giúp cho học sinh thực hiện lời giải thành những thao tác theo một trình tự xác định (mà ta gọi là theo một thuật giải nào đó) thì cần lưu ý rằng lúc đó học sinh đã tương đối giải chính xác bài toán. Để học sinh có được điều này thì ngay khi giáo viên truyền thụ tri thức phương pháp giải toán của một dạng cụ thể nào đó, giáo viên lưu ý cho học sinh về những yêu cầu của lời giải đúng, và cho học sinh thực hành lại việc giải những dạng toán đó.
- Lớp bài toán giáo viên đưa ra phù hợp và học sinh đã biết cách giải, cũng có thể bài toán ở dạng liên quan khác mà học sinh trung bình có thể phát hiện ra và thực hiện lời giải.
- Giáo viên dựa trên lý thuyết hoạt động gợi động cơ cho mỗi hoạt động trong quá trình học sinh thực hiện các thao tác giải đúng bài toán. Để có được động cơ trong hoạt động này giáo viên có thể đặt câu hỏi ngay sau khi đưa ra bài toán hay lớp bài toán cụ thể:

Em đã giải được bài toán dạng này hay tương tự chưa?

Em có gặp ~~trắc~~ **thắc** trong khi giải không?

Thực ra câu hỏi đầu để bảo đảm các em đã có cách giải đúng bài toán, còn câu hỏi thứ hai để hoàn thiện lời giải và thực hiện đúng, chính xác các bước giải.

*b) Rèn luyện khả năng phân tích một quá trình thành những thao tác được thực hiện theo trình tự xác định:*

Có thể nói, việc phân tích một quá trình thành những thao tác được thực hiện theo một trình tự xác định là một hoạt động mang tính quyết định của người học toán và làm toán. Nó cho ta thấy người học toán ấy có lối tư duy toán học hay không và có thực sự nhận thức đúng về môn toán hay không cũng là nhờ vào hoạt động này.

Hoạt động này giúp học sinh mổ xẻ một vấn đề phức tạp thành những vấn đề nhỏ lẻ và đơn giản cho việc giải quyết chúng. Trong hoạt động này học sinh tư duy một cách thực sự theo lối tư duy toán học bởi nó cho thấy sự nhìn nhận vấn đề ở nhiều khía cạnh nhiều mặt theo quy luật vận động chung của nó, để từ đó trên cơ sở các mặt hay khía cạnh ấy học sinh có thể phân tách chúng thành những vấn đề đơn giản hơn, giúp người học tìm ra phương pháp giải quyết vấn đề một cách có hiệu quả và tối ưu hơn.

Chính vì vậy, rèn luyện khả năng này là một hoạt động thiết yếu nhất của học sinh nhằm đảm bảo tốt cho các hoạt động khác (các hoạt động còn lại trong tư duy thuật giải). Bên cạnh đó, học sinh phát triển tốt về lối tư duy nói chung và tư duy thuật giải nói riêng nhằm đáp ứng các yêu cầu đặt ra của người dạy và người học.

*c) Rèn luyện việc khái quát hoá một quá trình diễn ra trên một số đối tượng riêng lẻ thành một quá trình diễn ra trên một lớp đối tượng:*

Việc phát triển tư duy thuật giải không thể tách khỏi việc phân tích, tổng hợp của học sinh học. Nó là yếu tố quan trọng nhất để phát triển tư duy nói chung và tư duy thuật giải nói riêng trong việc học tập toán.

*d) Rèn luyện việc mô tả chính xác quá trình tiến hành một hoạt động:*

Rèn luyện vấn đề này là việc giúp học sinh nhìn lại vấn đề một cách chính xác và đúng đắn hơn. Do đó đối với học sinh cần nắm vững tri thức nhất là tri thức phương pháp của lớp đối tượng ta cần giải quyết; còn đối với giáo viên cần đưa ra những bài tập mà học sinh đã có tri thức phương pháp giải nó, bên cạnh đó giáo viên hỗ trợ để học sinh có sự hoàn thiện trong lời giải của mình dựa trên thuật giải đang thực hiện với dạng vấn đề đang đề cập.

*e) Rèn luyện khả năng phát hiện thuật giải tối ưu để giải quyết bài toán:*

Để có thể rèn luyện khả năng này ở một dạng toán cụ thể, trước hết học sinh cần nắm vững và nắm sâu sắc các quy luật, mối quan hệ của lớp đối tượng đó, có cách giải chính xác và đầy đủ. Sau đó từ sự đòi hỏi thực tế của bài toán ta có thể tìm ra thuật giải tối ưu. Để có thể làm được điều này học sinh cần nhạy bén trong con đường giải quyết vấn đề đã có, có thể là đi tắt, bỏ bớt giai đoạn hay tìm ra điểm mấu chốt nào đó mà từ đó có thể thoả mãn yêu cầu thực tế nhưng không làm ảnh hưởng tới sự đúng đắn của lời giải.

Đây chỉ là vấn đề thực sự quan trọng khi đòi hỏi thực tế đặt ra do vậy hoạt động này thường ít đặt ra cho học sinh trung bình. Trong các hoạt động tư duy thuật giải thì hoạt động này nhằm đi sâu trong các hoạt động khác, nó cho học sinh khá giỏi một cách toàn vẹn và có hứng thú hơn trong khi giải toán để có được sự “hoàn hảo”.

## **2.4. Vai trò của việc ứng dụng và phát triển tư duy thuật giải trong dạy học Toán nói chung và dạy học giải bài tập toán nói riêng cho học sinh hệ trung cấp chuyên nghiệp**

Vai trò của việc ứng dụng và phát triển tư duy thuật giải đối với học sinh trong dạy học môn Toán là quan trọng. Cấu trúc của tư duy thuật giải gắn liền với 5 hoạt động (Hđ1-Hđ5), việc phát triển các hoạt động tư duy thuật giải sẽ góp phần phát triển các hoạt động khác của toán học.

- Tiến hành các hoạt động tư duy thuật giải là một phương tiện, một điều kiện để chiếm lĩnh tri thức và rèn luyện kỹ năng.

Thật vậy, để nắm vững khái niệm toán học, các tri thức và tri thức phương pháp học sinh phải tiến hành các hoạt động nhận dạng và thể hiện một khái niệm, một định lý hay một

dạng toán nào đó. Trong nhiều trường hợp, những hoạt động này diễn ra dưới dạng những hoạt động tư duy thuật giải như đã nêu.

Nói đến kỹ năng là phải nói đến hoạt động, kỹ năng được hình thành và phát triển nhờ các hoạt động tư duy thuật giải.

- Các hoạt động tư duy thuật giải đòi hỏi và thúc đẩy các hoạt động trí tuệ.

Các thao tác tư duy như phân tích và tổng hợp, so sánh, khái quát hóa, trừu tượng hóa và cụ thể hóa được phát triển khi tiến hành các hoạt động tư duy thuật giải.

Các phẩm chất trí tuệ như tính linh hoạt, tính độc lập cũng được phát triển trong các hoạt động tư duy thuật giải.

Khả năng tư duy logic và sử dụng ngôn ngữ chính xác cũng được rèn luyện qua các hoạt động tư duy thuật giải.

- Phát triển tư duy thuật giải góp phần giáo dục những đức tính tốt đẹp của người lao động mới và giáo dục thế giới quan duy vật biện chứng. Thật vậy:

Hoạt động (Hđ1) cho khả năng hình thành, củng cố những đức tính tốt như tính kỷ luật, ngăn nắp, cẩn thận, thói quen tự kiểm tra.

Hoạt động (Hđ4) rèn luyện khả năng diễn đạt chính xác. Nó cũng có thể cho ta những minh họa về mối quan hệ biện chứng giữa nội dung và hình thức. Một nội dung có thể tồn tại dưới nhiều hình thức. Nội dung quyết định hình thức và hình thức tác động trở lại nội dung.

Hoạt động (Hđ5) góp phần hình thành ý thức tìm phương án tối ưu khi giải quyết công việc.

Các hoạt động (Hđ1- Hđ5) dẫn tới việc hiểu đúng bản chất của quá trình tự động hóa và vai trò quyết định của con người trong quá trình đó.

Một thuật giải có cấu trúc đẹp, trình bày sáng sủa, chính xác có thể xem là sản phẩm của lao động trí óc, có tác dụng giáo dục thẩm mỹ cho học sinh.

- Phát triển tư duy thuật giải gắn liền với phát triển tư duy sáng tạo.

Trong số những mục đích của giáo dục thì việc phát triển năng lực tư duy sáng tạo, năng lực tự giải quyết vấn đề,...cho học sinh là những mục đích rất quan trọng. Tuy nhiên, các năng lực trên chỉ được phát triển nếu liên hệ với một thuật giải, một quy trình nào đó quen thuộc. Tính sáng tạo "nằm ngay trong" tính thuật giải. Nếu hiểu thuật giải là thực hiện tổ hợp các thao tác (Hđ1-Hđ5) theo một trình tự logic xác định để đi đến kết quả thì tính sáng tạo thể hiện ở những bước chuyển tiếp theo.

## **2.5. Một số biện pháp tích cực nâng cao năng lực ứng dụng tư duy thuật giải trong dạy học chủ đề Nguyên hàm Tích phân cho học sinh hệ trung cấp chuyên nghiệp**

### **2.5.1. Một số nguyên tắc dạy học theo hướng ứng dụng tư duy thuật giải cho học sinh**

Để dạy học giải bài tập theo hướng ứng dụng tư duy thuật giải đảm bảo chất lượng và đạt hiệu quả cao cần phải dựa trên một số nguyên tắc sau đây:

**Nguyên tắc 1:** Dạy học theo hướng ứng dụng tư duy thuật giải phải đáp ứng được mục đích của việc dạy và học toán theo đối tượng học sinh đó là:

Giúp học sinh lĩnh hội và phát triển một hệ thống kiến thức, kỹ năng, thói quen cần thiết cho công việc học tập và sinh hoạt; Hình thành và phát triển các phẩm chất đạo đức và tư duy (như tư duy logic, tư duy thuật giải, tư duy trừu tượng,...) cần thiết của một con

người có học vấn trong xã hội hiện nay; Góp phần quan trọng trong việc hình thành thể giới quan và nhân sinh quan, nhất là trong khoa học toán học, hiểu được nguồn gốc thực tiễn của toán học và vai trò của nó trong quá trình phát triển văn hóa văn minh nhân loại cũng như những tiến bộ của khoa học kỹ thuật hiện nay.

**Nguyên tắc 2:** Dạy học theo hướng ứng dụng tư duy thuật giải phải dựa trên định hướng đổi mới phương pháp dạy học hiện nay.

Định hướng đổi mới phương pháp dạy học hiện nay là tổ chức cho người học được học tập trong hoạt động và bằng hoạt động: tự giác, tích cực, sáng tạo (hoạt động hóa người học). Vì vậy, dạy học theo hướng ứng dụng tư duy thuật giải phải dựa trên định hướng đổi mới ấy và phát triển một cách thiết thực các phương pháp dạy học trên.

**Nguyên tắc 3:** Dạy học theo hướng ứng dụng tư duy thuật giải phải đảm bảo sự tôn trọng, có kế thừa và phát triển tối ưu chương trình sách giáo khoa hiện hành.

**Nguyên tắc 4:** Dạy học theo hướng ứng dụng tư duy thuật giải phải góp phần đắc lực hình thành nhân cách con người ở thời đại mới.

Xã hội ngày càng phát triển đòi hỏi con người phải năng động, tự chủ, sáng tạo, kỷ luật, biết tôn trọng pháp luật và các quy tắc của xã hội. Do đó, dạy học theo hướng ứng dụng tư duy thuật giải góp phần quan trọng trong việc phát triển nhân cách người học. Cùng với việc tạo điều kiện cho học sinh kiến tạo những tri thức và rèn luyện kỹ năng toán học, dạy học theo hướng ứng dụng tư duy thuật giải còn có tác dụng góp phần phát triển năng lực trí tuệ chung như phân tích, tổng hợp, trừu tượng hoá, khái quát hoá... và những phẩm chất của người lao động mới như: Tính cẩn thận, chính xác, tính kỷ luật, tính phê phán, tính sáng tạo, bồi dưỡng óc thẩm mỹ cho học sinh.

**Nguyên tắc 5:** Dạy học theo hướng ứng dụng tư duy thuật giải phải phát huy tính tích cực nhận thức của học sinh phù hợp với đối tượng học sinh.

Tính vừa sức để học sinh có thể chiếm lĩnh được tri thức, rèn luyện được kỹ năng, kỹ xảo nhưng mặt khác lại đòi hỏi không ngừng nâng cao yêu cầu để thúc đẩy sự phát triển của học sinh.

**Nguyên tắc 6:** Dạy học theo hướng ứng dụng tư duy thuật giải phải kết hợp chặt chẽ rèn luyện cho học sinh tính tổ chức, tính trật tự với tính linh hoạt và sáng tạo.

Để đào tạo những con người có đầy đủ các phẩm chất của người lao động mới đòi hỏi trong quá trình dạy học theo hướng phát triển tư duy thuật giải bên cạnh việc cho học sinh tập luyện tốt các hoạt động tư duy thuật giải cần làm cho học sinh biết cách tìm tòi, sáng tạo thông qua việc khai thác ứng dụng của một số nội dung kiến thức hay những bài tập đòi hỏi tính linh hoạt, tính tích cực trong tư duy của học sinh.

### **2.5.2. Một số biện pháp tích cực nâng cao năng lực ứng dụng tư duy thuật giải cho học sinh thông qua dạy học giải bài tập nguyên hàm, tích phân**

Việc ứng dụng tư duy thuật giải chính là việc rèn luyện cho học sinh thực hiện tốt các hoạt động tư duy thuật giải. Để làm được việc đó, trước hết việc dạy của giáo viên phải có tính chất thuật giải và được tiến hành theo hướng ứng dụng tư duy thuật giải qua các bài toán cho học sinh.

Trong quá trình giảng dạy giáo viên nên xây dựng các quy trình dạy học giải bài tập nguyên hàm, tích phân theo hướng ứng dụng và phát triển tư duy thuật giải của học sinh và ta có thể thông qua bốn khâu chủ yếu sau đây:

- Nắm vững lại tri thức (hệ thống lại kiến thức);

- Nhận thức tri thức phương pháp (dạy học tri thức phương pháp);
- Thực hiện giải bài toán nguyên hàm, tích phân theo lối thuật giải;
- Cuối cùng là hoàn thiện, củng cố tư duy thuật giải.

Trên cơ sở hệ thống các nguyên tắc dạy học theo hướng ứng dụng tư duy thuật giải đã nêu ở trên và đặc điểm của việc dạy học nói chung và dạy học giải bài tập nói riêng, chúng ta nên đề ra một số định hướng sư phạm nhằm góp phần phát triển tư duy thuật giải cho học sinh thông qua việc dạy học ứng dụng vào giải bài tập nguyên hàm, tích phân. Việc dạy học chủ đề nguyên hàm, tích phân hay cụ thể hơn là giải bài tập toán về chủ đề nguyên hàm và tích phân nhằm góp phần phát huy tính tích cực nâng cao năng lực ứng dụng tư duy thuật giải cho học sinh bao gồm một số biện pháp sau đây:

#### **2.5.2.1. Biện pháp 1: Xây dựng quy trình hệ thống lại kiến thức trong giờ dạy học bài tập**

Quy trình gồm 2 bước như sau.

*Bước 1.* Làm nảy sinh nhu cầu nhận thức cũng như tính tò mò và lòng ham muốn của các em cùng ý nghĩa của nó khi học phần này. Đây là bước gọi nên một không gian hoạt động tích cực và thiết thực cho những hoạt động sau.

*Bước 2.* Hệ thống lại kiến thức cũ cần đạt được cho tiết học. Để thực hiện bước này giáo viên có thể nêu lại hoặc gợi mở cho học sinh tự nêu lại những phần kiến thức cần quan tâm trong tiết học giải bài tập hôm nay.

Với các bước như trên giáo viên có thể sử dụng các biện pháp sư phạm thực hiện tốt khâu này như sau:

##### **Biện pháp sư phạm 1.**

Tận dụng các phương tiện trực quan thích hợp trong quá trình dạy học như các hình ảnh, mẫu truyện lịch sử đã đòi hỏi thực tế và các công thức, khái niệm, định lý, tính chất,... của phần kiến thức này.

##### **Biện pháp sư phạm 2.**

Mô phỏng, thực hiện đưa ra các yêu cầu, đòi hỏi thực tế và hệ thống các công thức trong phần học này (nhờ các câu hỏi gợi ý của giáo viên) phù hợp với mục đích, yêu cầu của tiết học. Chú ý rằng: Đây là khâu được thực hiện trong thời gian ngắn nhưng nó góp phần không nhỏ vào sự thành công của tiết học cũng như việc thực hiện các công việc được giao của học sinh.

**Ví dụ 1:** Hệ thống tri thức để áp dụng cho việc giải các bài toán có tính chất thuật giải như:

$$a) I = \int \frac{1}{(1+x)(1-2x)} dx$$

$$b) J = \int (x^2 + 2x - 1) dx$$

Giáo viên có thể thực hiện theo hai biện pháp sư phạm trên như sau:

Theo biện pháp sư phạm 1: Trong khoảng 5 phút đầu giờ (không kể việc tổ chức ổn định lớp học) sau khi tạo tư tưởng, không khí hồ hởi để học sinh có cách nhìn thật có ích và thực tế khi học vấn đề này giáo viên đưa ra và nhắc lại cho học sinh những phần kiến thức sau:

- 1)  $\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx$  ;  $k \neq 0$
- 2)  $du = u' dx$  với  $u = u(x)$
- 3)  $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$

$$4) \int e^x dx = e^x + c$$

*Chú ý:* Hãy trình bày phương pháp giải dạng  $\int \frac{1}{(ax+b)(cx+d)} dx$ . Gợi ý cho học sinh như sau:

+ Hãy phân tích  $\frac{1}{(1+x)(1-2x)} = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{1-2x}$  và tìm  $A; B$

+ Từ công thức 2) em có nhận xét gì về  $dx$  với  $d(1+x); d(1-2x)$ .

+ Cho  $f(x)$  là một đa thức, hãy nhận xét bậc của đa thức trong  $f(x) \cdot e^x$  với bậc của đa thức trong  $[f(x) \cdot e^x]'$ .

Như vậy, với 4 công thức vừa nêu cùng với các ~~chú ý~~ (trình bày trong phần dạy học tri thức phương pháp) thì bằng các hoạt động và sự gợi mở của giáo viên, học sinh sẽ đi đến một cách giải đúng đắn và hợp lý riêng cho mình.

Theo biên pháp sư phạm 2: Cũng trong khoảng 5 phút đầu ~~giờ~~ (không kể việc tổ chức ổn định lớp học) sau khi tạo tư tưởng, không khí hồ hởi để học sinh có cách nhìn thật có ích và thực tế khi học vấn đề này giáo viên đưa ra những câu hỏi gợi mở thiết thực để học sinh hình dung và nêu lại được các công thức như đã trình bày.

Cụ thể như: (có hai cách trình bày)

+ Trình bày bằng lời.

+ Trình bày bằng hình ảnh : *Hãy cho biết về còn lại của công thức là gì?*

$$1) \int kf(x) dx; \quad 2) du = ?; \quad 3) \int \frac{du}{u} \quad 4) \int e^x dx$$

Như vậy, chỉ trong khoảng 5-7 phút đầu giờ ta đã chuẩn bị cho học sinh những công thức cần nhớ và áp dụng cho tiết học, nó đảm bảo cho sự thành công và kết quả của tiết học được cao hơn. Tuy khâu này chiếm ít thời gian nhưng nó lại tạo ra một không gian, một phong thái đã xác định sẵn những gì cần thiết cho tiết học của cả giáo viên và học sinh.

#### 2.5.2.2. Biên pháp 2: Xây dựng quy trình dạy học tri thức phương pháp giải bài tập

Truyền thụ cho học sinh những **tri thức phương pháp về tư duy thuật giải** trong khi tổ chức, điều khiển tập luyện các hoạt động thông qua dạy học giải bài tập.

Trong khi dạy học sinh xây dựng thuật giải cụ thể cho một dạng bài tập nào đó về phần này, giáo viên cần phải truyền thụ cho học sinh những kinh nghiệm và nghệ thuật trong phương pháp suy nghĩ, giúp học sinh tự xây dựng được thuật giải trong những tình huống mới.

Quá trình xây dựng một thuật giải cũng là quá trình giải một bài toán chưa có thuật giải. Vì vậy, những tri thức phương pháp về tư duy thuật giải phải là bộ phận hợp thành tri thức phương pháp giải bài toán nói chung và phải phản ánh được nét đặc thù riêng biệt của quá trình này.

Sau đây là những **tri thức phương pháp** cần truyền thụ cho học sinh:

- 1) Tìm hiểu bài toán một cách tổng thể để phát hiện nét đặc thù, dấu hiệu riêng biệt của bài toán.
- 2) Phân tích bài toán để thấy rõ mối liên hệ giữa giả thiết và kết luận của bài toán.
- 3) Phân tích bài toán thành từng trường hợp, bộ phận hoặc thành những bài toán nhỏ lẻ, đơn giản hơn.

4) Mò mẫm và dự đoán thuật giải bằng cách phân chia thành các trường hợp cùng dấu hiệu riêng biệt của nó. Xem xét các trường hợp (kết hợp với suy luận) bằng cách xét các trường hợp đặc biệt, tương tự, khái quát....

5) Quy lạ về quen (xem xét, suy luận và biến đổi từ một cấu trúc chưa biết thành cấu trúc đã biết thuật giải).

6) Kiểm tra và nghiên cứu lời giải, tìm cách giải hợp lý hơn (thuật giải tối ưu) bằng cách khắc phục điều chưa hợp lý của lời giải cũ hoặc thay đổi cách nhìn đối với bài toán; sử dụng kết quả hay cách giải bài toán cho bài toán khác; đề xuất bài toán mới.

Với các tri thức phương pháp trên và để truyền thụ nó cho học sinh được tốt nhất, đạt hiệu quả cao nhất giáo viên nên đề ra các biện pháp sư phạm cho từng loại hoạt động của tư duy thuật giải như sau:

**a. Đối với tri thức phương pháp : *Tìm hiểu bài toán một cách tổng hợp, phát hiện những đặc điểm và dấu hiệu riêng biệt của bài toán***

Đây là một cách nhìn tổng thể về một bài toán bất kỳ của học sinh đã nắm tương đối vững những phần kiến thức cơ bản trong chương trình, nhằm tìm ra cái mấu chốt (“*khoá*”) của vấn đề được đề cập trong bài toán mà chỉ ở cái chốt đó thì bài toán mới được giải quyết hoặc giải quyết một cách tối ưu nhất, đồng thời có tác dụng trong việc rèn luyện tính tư duy sáng tạo của học sinh (tất nhiên tư duy thuật giải không là ngoại lệ). Với ý nghĩa của nó như vậy, giáo viên phải thực sự quan tâm và chú trọng tới hoạt động này, nó thực sự đạt kết quả cao trong việc rèn luyện tư duy nói chung và tư duy thuật giải nói riêng trong quá trình giải bài toán ta có thể giải quyết sau:

**Ví dụ 2.** Tìm nguyên hàm:  $J = \int \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} dx$

Cũng không tránh khỏi những vướng mắc ban đầu khi ta tìm lời giải cho bài toán này, đa số học sinh sẽ đi vào phép đổi biến với  $u = x^2 + 1$  và dẫn tới sự thất bại, cũng có học

sinh may mắn khi cô tạo ra một vi phân của  $x^2 + 1$  và đi đến phân tích:  $J = \int \frac{\frac{x^2 - 1}{2x} 2x}{(x^2 + 1)^2} dx$  để rồi dùng ngay phương pháp từng phần để giải, đến đây học sinh đưa về được bài toán đơn giản để giải.

Kỳ thực sự nhìn nhận trên là ta đã cố phân tích giả thiết để tìm lời giải, tuy có vấp và hơn. Nếu từ sự nhìn nhận một cách tổng quát thì ta có thể thấy ngay dấu hiệu ở đây là  $x^2 + 1$  và  $x^2 - 1$  khi đó ta nghĩ ngay đến sự phân tích:

Chia cả tử và mẫu cho  $x^2$  ta được  $J = \int \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2} dx$  (và đây chính là dấu hiệu riêng biệt của

bài toán).

Đến đây ta đi tới lời giải thật không khó với phương pháp đổi biến số như sau :

$$\text{Đặt } u = x + \frac{1}{x} \Rightarrow du = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx$$

 Bài toán đưa về  $J = \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C = -x - \frac{1}{x} + C$

Như vậy, trong sự nhìn nhận một bài toán một cách tổng thể để tìm ra một dấu hiệu riêng biệt của bài toán là một việc làm có tính sáng tạo, không những vậy có những bài toán mà không có cách giải khác (đó với học sinh phổ thông) ngoài việc dựa vào dấu hiệu này.

## b. Đối với tri thức phương pháp: *Phân tích giả thiết và kết luận của bài toán*

Trong một số bài toán thì giả thiết (cái đã cho) và kết luận (cái cần tìm) bao giờ cũng có mối liên hệ (sự tác động của các tri thức nhất là tri thức phương pháp đã biết) với nhau. ở một số bài toán mối liên hệ ấy dễ dàng thấy được nhưng cũng có nhiều bài toán mới nhìn qua khó có thể thấy được mối liên hệ này. Vì vậy, việc phân tích bài toán để thấy rõ giả thiết và kết luận để từ đó tìm ra mối liên hệ giữa chúng sẽ góp phần không nhỏ trong việc xây dựng được thuật giải của bài toán đó. Sự nhìn nhận, đánh giá và tìm hiểu này đã đi sâu vào bài toán hơn so với cách nhìn trên nó thúc đẩy sự khám phá tìm tòi các quy luật của một sự vật hiện tượng nào đó trên một phương diện nào đó của toán học. Đối với người học toán thì đây là một hoạt động thường xuyên và thiết thực, cần xác định rõ ý nghĩa cũng như cách thức thực hiện nó để đạt được những kết quả như mong muốn.

**Ví dụ 3.** Chứng minh rằng: Nếu  $f(x)$  liên tục và chẵn trên  $R$  thì  $I = \int_{-a}^a \frac{f(x)dx}{a^x + 1} = \int_0^a f(x)dx$  với

$a \in R^*$  và  $a > 0$

Bây giờ ta đi phân tích giả thiết và kết luận bài toán này như sau:

Giả thiết cho  $f(x)$  là liên tục và chẵn trên  $R$  điều này sẽ cho ta được hai điều sau:

+  $f(x)$  cũng liên tục với mọi  $x$  thuộc  $[-a; a]$

+  $f(x) = f(-x)$  với mọi  $x$  thuộc  $[-a; a]$

Còn kết luận là  $\int_{-a}^a \frac{f(x)dx}{a^x + 1} = \int_0^a f(x)dx$ , nhìn vào kết luận ta thấy rằng ở tích phân bên phải thì cần chỉ từ 0 đến  $a$  mà thôi.

Ta thử phân tích  $\int_{-a}^a \frac{f(x)dx}{a^x + 1} = \int_{-a}^0 \frac{f(x)dx}{a^x + 1} + \int_0^a \frac{f(x)dx}{a^x + 1}$

$$\text{và } \int_0^a f(x)dx = \int_0^a \frac{a^x f(x)dx}{a^x + 1} + \int_0^a \frac{f(x)dx}{a^x + 1}$$

so sánh chúng ta thấy việc còn lại là dựa vào giả thiết để chứng minh :

$$\int_{-a}^0 \frac{f(x)dx}{a^x + 1} = \int_0^a \frac{a^x f(x)dx}{a^x + 1}, \text{ từ đây dựa vào hai cận đã làm nảy sinh việc ta đặt } x = -t \text{ và}$$

sử dụng tính chẵn cùng tính chất tích phân nữa sẽ cho ta điều cần chứng minh.

Từ điều đã được chứng minh như trên ta hoàn toàn có thể sử dụng nó để giải những

bài toán dạng  $I = \int_{-a}^a \frac{f(x)dx}{a^x + 1}$  theo một thuật giải nhất định.

Thuật giải đó được tiến hành theo các bước:

bước 1: ta phân tích  $\int_{-a}^a \frac{f(x)dx}{a^x + 1} = \int_{-a}^0 \frac{f(x)dx}{a^x + 1} + \int_0^a \frac{f(x)dx}{a^x + 1}$

bước 2: đặt  $x = -t$  và đưa bài toán về dạng  $I = \int_0^a f(x)dx$

bước 3: tìm kết quả và kết luận.

### c. Đối với tri thức phương pháp: *Phân tích bài toán thành từng bộ phận*

→ Đối với những bài toán phức tạp (chứa căn thức, chứa dấu giá trị tuyệt đối, chứa nhiều hàm số lượng giác, số mũ...) thường gây rất nhiều khó khăn cho học sinh trong quá trình giải. Vì vậy, trong quá trình dạy học giải bài tập nguyên hàm, tích phân và ứng dụng, giáo viên cần rèn luyện cho học sinh cách đơn giản hoá bài toán hoặc phân chia thành các bài toán riêng lẻ để dễ tìm cách giải.

**Ví dụ 4.** Tính tích phân  $I = \int_0^{\ln \sqrt{3}} \frac{(1+e^x)^2}{1+e^{2x}} dx$

Để giải bài toán này ta sẽ mô sẽ nó như sau:

$$\frac{(1+e^x)^2}{1+e^{2x}} = 1 + \frac{2e^x}{1+e^{2x}} \text{ khi đó ta chỉ còn bận tâm đến việc giải bài toán}$$

$$J = \int_0^{\ln \sqrt{3}} \frac{2e^x}{1+e^{2x}} dx \text{ với cách đổi biến: Đặt } t = e^x \text{ ta đưa J về dạng}$$

$$J = 2 \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2} \text{ và với cách đặt } t = \tan \alpha \text{ ta lại đưa J về bài toán đơn giản}$$

$$J = 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\alpha = \frac{\pi}{6} \text{ ta có kết quả là } I = \frac{3 \ln 3 - \pi}{6}$$

Thực tế bài toán trên là không khó cho việc định hướng cách mô xẻ, phân tích. Tuy nhiên học sinh cần nắm vững các công thức biến đổi hàm mũ và nhìn thấy ở bài toán J đã có cách giải tuy phải dùng tới hai lần đổi biến số, nhưng việc phát hiện ra điều này lại cũng không khó đối với đa số các học sinh.

Đây là một bài toán cụ thể chứ chưa là một dạng toán nào để ta viết ra thuật giải, và sự phân tích trên đã cho ta thấy rõ hiệu quả của việc phân tích, mô xẻ một bài toán thành nhiều bộ phận như thế nào trong việc đi tìm lời giải cho bài toán, Sau đây chúng ta tìm hiểu thêm một ví dụ mà dạng tổng quát của nó sẽ cho một thuật giải.

### d. Đối với tri thức phương pháp: *Rèn luyện năng lực phán đoán*

Mò mẫm và dự đoán cách giải bài toán bằng cách phân chia thành các trường hợp, hoặc xét trường hợp đặc biệt, tương tự, khái quát,...

Có thể nói: Việc phán đoán đó là sự nhìn nhận theo một chiều hướng khác (không quen thuộc), một cách nhìn đến đích mà chưa rõ con đường hay một ý tưởng mới táo bạo trong hoạt động của con người là một trong những việc làm thiết thực thể hiện rõ năng lực tư duy nói chung và tư duy thuật giải nói riêng. Trong toán học cũng vậy, có những bài toán mà những cách giải thông thường lâu nay ta hay sử dụng thì không thể giải quyết được hoặc giải quyết nó không đáp ứng được đòi hỏi thực tế (không tối ưu) mà chỉ có thể có cách nhìn nhận mới, một sự phán đoán vượt ra xa, sự khác thường so với bình thường thì mới có thể giải quyết được vấn đề.

**Ví dụ 5.** Tính tích phân sau  $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$

Ta có thể suy nghĩ và phán đoán theo lối sau:

Thoạt nhìn bài toán ta có thể thấy đổi biến số hay từng phần cũng cho thấy sự bế tắc, bây giờ ta thử nhớ lại xem có một việc làm nào? Một cách biến đổi nào quen thuộc, hay một bà toán nào mà (không nhất thiết là tích phân) mà cho hàm kiểu này....

Với những suy nghĩ như vậy học sinh có thể nghĩ ngay được bài toán giới hạn của hàm số dạng này thường nhân liên hợp của mẫu, và có thể bài toán sẽ được giải quyết từ đây.

Sau khi nhân liên hợp cả tử và mẫu với mẫu ta có

$$I = \int_0^1 (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) dx \text{ Đây là bài toán rất quen thuộc và không khó cho đa số các học sinh.}$$

### e. Đối với tri thức phương pháp: *Rèn luyện năng lực “quy lạ về quen”*

Thực tế có nhiều bài toán không cho dưới dạng có thể sử dụng các thuật giải quen thuộc ngay mà đòi hỏi người giải phải biết phân tích, biến đổi, biết nhận ra một số đặc điểm đặc biệt của bài toán để có thể đưa bài toán về dạng bài toán đã biết thuật giải. Đối với các bài toán dạng này, trong quá trình dạy học giáo viên cần rèn luyện cho học sinh kỹ năng huy động các thuật giải đã biết, tri thức đã biết. Để đạt được mục đích này, giáo viên đề nghị cách giải quyết sau đây:

*Vận dụng và huy động các tri thức nhằm biến đổi đưa bài toán về các bài toán quen thuộc (những dạng bài toán đã được đề cập trong sách giáo khoa hoặc bài toán tương tự)*

**Ví dụ 6.** Tính tích phân sau  $I = \int_1^2 \frac{dx}{x(x^5 + 1)}$

Nhận thấy rằng bài toán cần bổ sung thêm  $x^4$  để có thể dễ dàng đổi biến số và đưa bài toán về dạng quen thuộc cụ thể như sau:

Nhân cả tử và mẫu với  $x^4$  ta được  $I = \int_1^2 \frac{x^4 dx}{x^5(x^5 + 1)}$

Đến đây ta đặt  $u = x^5$  bài toán đã đưa về dạng quen thuộc

$$I = \int_1^{32} \frac{du}{u(u+1)} = \int_1^{32} \left( \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} \right) dx = \ln \frac{64}{33}$$

Từ cách giải trên ta có thể hoàn toàn đưa ra thuật giải cho bài toán tổng quát hơn:  $I = \int_a^b \frac{dx}{x(x^n + 1)}$

Thuật giải như sau:

**bước 1:** đưa bài toán về dạng quen thuộc:

$$I = \int_a^b \frac{x^{n-1} dx}{x^n(x^n + 1)} = \frac{1}{n} \int_a^b \frac{dx^n}{x^n(x^n + 1)}$$

**bước 2:** Phân tích và thực hiện phép tính :

$$I = \frac{1}{n} \int_a^b \left[ \frac{1}{x^n} - \frac{1}{x^n + 1} \right] dx^n = \frac{1}{n} \left[ \ln x^n - \ln(x^n + 1) \right]_a^b$$

**bước 3:** kết luận:  $I = \frac{1}{n} \left[ \ln \frac{b^n}{b^n + 1} - \ln \frac{a^n}{a^n + 1} \right] = \frac{1}{n} \ln \frac{b^n(a^n + 1)}{a^n(b^n + 1)}$

Qua đây có thể nói rằng việc liên hệ giữa bài toán đã làm với một bài toán mới là một trong những sự vận dụng linh hoạt của những gì mà học sinh đã học được. Bên cạnh đó học sinh cũng cần có một khối lượng tri thức vừa đủ để có thể làm được điều trên và vận dụng nó một cách linh hoạt hơn.

Việc làm trên có thể sẽ tạo dựng cho học sinh sự nhạy bén trong vận dụng và áp dụng tốt các tri thức trong cuộc sống.

#### **f. Đối với tri thức phương pháp: *Đánh giá kết quả và phát hiện thuật giải tối ưu***

Đánh giá lại kết quả, tìm cách giải hợp lý hơn bằng cách khắc phục chỗ chưa hợp lý của lời giải cũ hoặc thay đổi cách nhìn đối với bài toán. Sử dụng kết quả hay cách giải bài toán này cho bài toán khác, đề xuất bài toán mới.

**Ví dụ 7.** Tính tích phân  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x \cdot dx$

Thông thường học sinh sẽ biến đổi và giải theo hướng sau đây:

Bước 1: phân tích  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x)^3 \sin x \cdot dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x)^3 d(\cos x)$

Bước 2: kết luận  $I = -(\cos x - \cos^3 x + \frac{3}{5} \cos^5 x - \frac{1}{7} \cos^7 x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16}{35}$

Ta có thể nhận xét lời giải này như sau: Ở đây số mũ của hàm  $\sin x$  là nhỏ hơn hoặc bằng 7 thì việc giải quyết bài toán này là dễ (dựa vào cách giải trên). Tuy vậy nếu bài toán có số mũ cao hơn nữa có lẽ cách giải này là không ổn, chưa nói đến chuyện số mũ đó là lẻ hay chẵn.

Như vậy đề xuất bài toán mới từ một bài toán đã có thuật giải là một cách để nắm vững thuật giải, biết biến đổi linh hoạt trong khi thực hiện thuật giải. Do đó, ngay sau khi dạy một thuật giải nào đó (có thể là một quy tắc, một công thức...), giáo viên có thể ra cho học sinh một số bài toán mới được suy ra từ thuật giải đã biết hoặc hướng dẫn học sinh đề xuất bài toán mới. Việc làm này sẽ là một biện pháp tốt để phát triển tư duy thuật giải cho học sinh.

Bây giờ ta sẽ xây dựng thuật giải để giải bài toán tổng quát hơn:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cdot dx$$

Các bước giải được thực hiện như sau:

bước 1: biến đổi:  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \sin^{n-1} x \cdot dx$

bước 2: Dùng phương pháp từng phần ta có:

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \sin^{n-1} x \\ dv = \sin x \cdot dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (n-1) \cdot \sin^{n-2} x \cdot \cos x \cdot dx \\ v = -\cos x \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } I_n = -\cos x \cdot \sin^{n-1} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) \cdot \sin^{n-2} x \cdot dx$$

$$= 0 + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$$

$$\text{hay } I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

$$\text{bước 3: kết luận } I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

Ta có thể áp dụng với  $n = 7$  cho bài toán trước ta được

$$I_7 = \frac{6}{7} I_5 = \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} I_3 = \frac{24}{35} \cdot \frac{2}{3} I_1 = \frac{16}{35} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\frac{16}{35} \cdot (\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0) = \frac{16}{35}$$

**Ví dụ 8.** Tính tích phân  $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$  với  $a > 0$

Đây là một bài toán rất quen thuộc mà một số bài toán tương tự trong sách giáo khoa đã đề cập, việc giải bài toán này theo phương pháp đổi biến với  $x = a \cdot \tan t$  không có gì lạ và tất nhiên nó cũng cho thuật toán. Tuy vậy với cách nhìn này thì thuật toán có được là chưa thực sự tối ưu:

**bước 1:** Đặt  $x = a \tan t$  với  $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

**bước 2:** Đưa bài toán về biến mới

$$\text{Khi đó bài toán trở thành } I = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{\cos t}$$

**bước 3:** biến đổi và tính toán

Đối với bài toán này ta có thể giải theo hướng sau:

$$I = \frac{1}{a} \int \frac{\cos t dt}{1 - \sin^2 t} = \frac{1}{a} \int \frac{d(\sin t)}{(1 - \sin t)(1 + \sin t)} = \frac{1}{2a} \int \frac{d(\sin t)}{1 - \sin t} + \frac{1}{2a} \int \frac{d(\sin t)}{1 + \sin t}$$

**bước 4:** kết luận

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2a} \ln |\cos t| + C$$

Bây giờ ta nhận xét kết quả cũng như cách giải trên như sau: Cách giải như trên cho ta thấy sự dài dòng và kồng kềnh, do đó ta sẽ tìm một thuật giải khác mà có sự tối ưu hơn (sự nhanh gọn).

Chúng ta có thể xem cách giải sau là cách tối ưu, nó cho ta một thuật giải để giải bài toán dạng này với phép toán thật đơn giản, nhanh gọn và chính xác.

**bước 1:** Nhận xét:  $\left[ \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) \right]' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$

**bước 2:** Áp dụng thật đơn giản ta có

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$$

**bước 3:** kết luận  $I = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$

Đối với học sinh, cách giải trên là phù hợp với nhận thức của họ khi đứng trước bài toán này. Tuy nhiên, giáo viên có thể hướng dẫn học sinh tìm cách giải tối ưu hơn và có thể áp dụng để giải cho bài toán tổng quát hơn như sau:  $I = \int \frac{1}{\sqrt{a.x^2 + b.x + c}} dx$

### 2.5.2.3. Biện pháp 3: Hướng dẫn giải một số bài toán đã biết theo một thuật giải nào đó.

Một số bài tập chúng ta nên trình bày chi tiết các thuật giải và đưa ra một số bài tập cụ thể để học sinh nắm vững cách giải một số bài toán phần này nhằm thực hiện tốt việc đi từ cách giải bài toán sang hình thành một thuật giải, đó chính là hoạt động thực hiện thuật giải (Hđ1). Giáo viên cần cho học sinh hiểu rõ vấn đề: nhớ và vận dụng thành thạo các quy trình, thuật toán có sẵn là một việc làm cần thiết nhưng chưa đủ. Trong học tập phải có thói quen không nên dễ dàng chấp nhận những điều đã có sẵn mà cần phải luôn có ý thức và niềm say mê huy động tích cực vốn tri thức và năng lực của bản thân để tìm ra những phương pháp khác nhau hoặc phương pháp tối ưu hơn khi đứng trước vấn đề cần giải quyết.

**Ví dụ 9:** Tính  $I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{x(x+1)} dx$

Nhận xét: Sau khi học sinh đã được truyền thụ những tri thức về nội dung này thì có lẽ khi gặp bài toán này học sinh sẽ rất khó nhìn ra cách giải, và với những gợi ý sau thì giáo viên có thể hướng dẫn học sinh tự tìm cho mình một cách giải (hay tốt hơn là một thuật giải):

Em hãy phân tích  $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$  và tìm A; B nhờ phương pháp hệ số bất định, từ đó tính tích phân trên?

Dựa vào phương pháp trên hãy nêu thuật giải tìm nguyên hàm dạng  $I = \int \frac{dx}{(x-a)(x-b)}$  ?

Mong đợi: + Từ đẳng thức trên

$$\text{ta có : } A(x+1) + Bx = 1 \Rightarrow (A+B)x + A = 1 \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{dx}{x} - \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{dx}{x+1} = \ln \frac{x}{x+1} \Big|_{\frac{1}{2}}^2 = \ln 2$$

+ Dựa vào cách giải trên ta có thuật giải để giải dạng

$$I = \int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} \text{ như sau:}$$

$$\text{Bước 1: phân tích } \frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$$

Bước 2: Tìm A, B nhờ phương pháp hằng số bất định:

$$\text{ta có: } A(x-a) + B(x-b) = 1$$

$$\Rightarrow (A+B)x - Ab - Ba = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -Ab-Ba=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{a-b} \\ B=\frac{1}{b-a} \end{cases}$$

Bước 3: Kết luận:

$$I = \frac{1}{a-b} \int \frac{dx}{x-a} - \frac{1}{a-b} \int \frac{dx}{x-b} = \frac{1}{a-b} \ln \left| \frac{x-a}{x-b} \right| + C$$

**Ví dụ 10.** Tính  $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$

Nhận xét: Đối với đa số học sinh, khi mà chưa giải dạng này có lẽ đây cũng là bài toán khó. Tuy vậy các bạn đã được trang bị phương pháp đổi biến số, nên với những câu hỏi gợi ý sau có thể giúp học sinh có cách giải tốt cũng như tự tìm ra thuật giải của bài toán tổng quát hơn.

+ Dùng phương pháp đổi biến số với  $x = \sin t$  ;  $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  và tính tích phân trên

+ Từ đánh giá trên hãy xây dựng thuật giải cho dạng

$$I = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} . dx, \text{ với } a > 0.$$

Mong đợi:

+ Đặt  $x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t dt$

với  $x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$  ;  $x = 0 \Rightarrow t = 0$  suy ra:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t} . \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2t \right) dt = \frac{1}{2} t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4} \sin 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

Thuật toán giải bài toán dạng:  $I = \int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$  như sau:

**bước 1:** Đổi biến với  $x = a \cdot \sin t$  ,  $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

suy ra  $dx = a \cos t dt$

**bước 2:** Đổi cận và đưa về bài toán quen thuộc

với  $x = a \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$  ;  $x = 0 \Rightarrow t = 0$  bài toán đưa về:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a} \frac{a \cdot \cos t \cdot dt}{\sqrt{1 - \sin^2 t}}$$

**bước 3:** Tính và kết luận:  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$

**Ví dụ 11.** Tính  $I = \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$  với  $a > 0$ .

Nhân xét rằng: Đây là bài toán tổng quát hơn so với Ví dụ 3 ở trên và nó cũng tương tự như ví dụ mở rộng của ví dụ 3 mà ta đã có thuật giải.

**Ví dụ 12.** Tính  $I = \int_0^1 (x^2 - 2x - 1)e^{-x} dx$

Đây là bài toán quen thuộc, thường thì học sinh sẽ chọn ngay phương pháp từng phần để giải, tuy vậy trong trường hợp đa thức chứa trong tích phân có bậc cao hơn 3 thì việc dùng phương pháp từng phần sẽ trở nên kông kên hơn.

Với sự nhìn nhận trên giáo viên có thể hướng dẫn học sinh xây dựng một thuật giải được coi là tốt hơn:

Trước hết giáo viên yêu cầu học sinh trả lời các câu hỏi sau đây:

*Hãy tính đạo hàm của  $P(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$  và cho biết đạo hàm đó chứa đa thức có bậc như thế nào? Em rút ra được điều gì?*

*Hãy xây dựng quy trình giải bài toán này?*

Với những điều như trên học sinh hoàn toàn có thể đưa ra thuật toán giải bài toán này như sau:

**bước 1:** Đặt  $P(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$  là một nguyên hàm của  $I$

**bước 2:** Tìm  $a; b; c$  sao cho  $[P(x)]' = (x^2 - 2x - 1)e^{-x}$

Ta có  $[P(x)]' = [-ax^2 + (2a - b)x + b - c]e^{-x}$

Bằng phương pháp hệ số bất định ta tìm được: 
$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = 1 \end{cases}$$

**bước 3:** kết luận:  $I = (-x^2 + 1)e^{-x} + C$

Nhận thấy rằng: Bài toán tổng quát  $I = \int f(x)e^{-x} dx$  đều cho thuật giải tương tự, với  $f(x)$  là một đa thức bậc  $n$ .

Sau khi đã hướng dẫn cho học sinh thực hiện một số hoạt động của tư duy thuật giải, giáo viên cần chuẩn lại kiến thức một lần nữa giúp học sinh được củng cố và hoàn thiện trong nhận thức về tri thức của mình.

**2.5.2.4. Biện pháp 4: Rèn luyện các hoạt động tư duy thuật giải trong các khâu của dạy học giải bài tập.**

*\* Thực hiện những thao tác theo một trình tự xác định phù hợp với một thuật giải.*

Việc rèn luyện hoạt động này sẽ tạo cho mỗi học sinh làm việc một cách có hệ thống, một chương trình đã định sẵn (như cách làm việc theo công nghệ, dây chuyền đã có). Giúp học

sinh có khả năng tốt hơn trong việc thực hiện hoạt động T<sub>1</sub>, là khâu cuối trong tiến trình tìm thuật giải cho một bài toán.

**Ví dụ 13:** Thực hiện thao tác giải bài toán sau: tính  $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^5 x dx$

Các thao tác được lần lượt tiến hành sau đây:

Phân tích hàm dưới dấu tích phân:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^5 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 - \sin^2 x)^2 \cos x dx$$

Đến đây ta sẽ nghĩ ngay đến việc đặt  $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$   
đưa bài toán về biến mới  $t$  để thực hiện phép tính:

$$I = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} (1 - 2t^2 + t^4) dt = \left( t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{t^5}{5} \right) \Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{49\sqrt{3}}{160}$$

← Các thao tác trên thực hiện xác định một thuật giải đó là:

✓ bước 1: phân tích  $\cos^5 x = (1 - \sin^2 x)^2 \cos x$

✓ bước 2: Đổi biến với  $t = \sin x$

✓ bước 3: Tính và kết luận.

**Ví dụ 14:** Thực hiện thao tác giải bài toán sau:  $I = \int \frac{dx}{3x^2 - 4}$

biến đổi:  $3x^2 - 4 = (\sqrt{3}x)^2 - 2^2$

bài toán trở thành  $I = \int \frac{dx}{(\sqrt{3}x)^2 - 2^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{d(\sqrt{3}x)}{(\sqrt{3}x)^2 - 2^2}$

$$= \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sqrt{3}x - 2}{\sqrt{3}x + 2} \right| + C$$

Các thao tác trên thực hiện xác định một thuật giải:

✓ bước 1: biến đổi:  $3x^2 - 4 = (\sqrt{3}x)^2 - 2^2$

✓ bước 2: Đưa bài toán về dạng quen thuộc

$$I = \int \frac{dx}{(\sqrt{3}x)^2 - 2^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{d(\sqrt{3}x)}{(\sqrt{3}x)^2 - 2^2}$$

✓ bước 3: Tính và kết luận:  $I = \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sqrt{3}x - 2}{\sqrt{3}x + 2} \right| + C$

Học sinh thực hiện tốt hoạt động này sẽ khiến bản thân họ phù hợp hơn với môi trường đầy công nghệ và lối làm việc công nghiệp hiện nay.

\* *Phân tích một quá trình thành những thao tác được thực hiện theo trình tự xác định.*

Đối với đa số học sinh, việc phân tích một cách chính xác một quá trình thành những thao tác là việc làm không hề dễ bởi sự logic toán học của từng thao tác thành phần trong đó. Người thực sự học tốt toán thì mới có thể đi từ phương pháp giải đến phân tích một cách chính xác quá trình ấy thành những thao tác theo đúng trình tự của nó (các bước giải bài toán).

Việc luyện tập hoạt động này sẽ khiến học sinh trở nên hoàn thiện trong lối tư duy thuật giải hơn.

**Ví dụ 15:**  $I = \int \frac{1}{(x+a)^2(x+b)^2} dx$  với  $a \neq b$

Có lẽ rằng: Thoạt nhìn bài toán khiến cho ta nhớ đến bài toán quen thuộc : tìm nguyên hàm của  $f(x) = \frac{1}{(x+a)(x+b)}$  đã được giải quyết nhờ phương pháp đồng nhất thức

Với bài toán dạng này ta cũng sẽ dùng phương pháp đồng nhất thức với sự phân tích như sau:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \frac{1}{(x+a)^2(x+b)^2} &= \left[ \frac{1}{(x+a)(x+b)} \right]^2 = \left[ \frac{(x+a)-(x+b)}{(a-b)(x+a)(x+b)} \right]^2 \\ &= \frac{1}{(a-b)^2} \left[ \frac{1}{x+b} - \frac{1}{x+a} \right]^2 \\ &= \frac{1}{(a-b)^2} \left[ \frac{1}{(x+a)^2} - \frac{2}{(x+a)(x+b)} + \frac{1}{(x+b)^2} \right] \\ &= \frac{1}{(a-b)^2} \left[ \frac{1}{(x+a)^2} - 2 \frac{(x+a)-(x+b)}{(a-b)(x+a)(x+b)} + \frac{1}{(x+b)^2} \right] \\ &= \frac{1}{(a-b)^2} \left[ \frac{1}{(x+a)^2} - \frac{2}{(a-b)(x+b)} + \frac{2}{(a-b)(x+a)} + \frac{1}{(x+b)^2} \right] \end{aligned}$$

Khi đó bài toán đã được đưa về bài toán quen thuộc:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{(a-b)^2} \left[ \int \frac{dx}{(x+a)^2} - \frac{2}{a-b} \int \frac{dx}{x+b} + \frac{2}{a-b} \int \frac{dx}{x+a} + \int \frac{dx}{(x+b)^2} \right] \\ &= \frac{1}{(a-b)^2} \left[ -\frac{1}{x+a} - \frac{2}{a-b} \ln|x+b| + \frac{2}{a-b} \ln|x+a| - \frac{1}{x+b} \right] + C \\ &= \frac{1}{(a-b)^2} \left[ \frac{2}{a-b} \ln \left| \frac{x+a}{x+b} \right| - \frac{2x+a+b}{(x+a)(x+b)} \right] + C \end{aligned}$$

\* *Khái quát hóa một quá trình diễn ra trên một số đối tượng riêng lẻ thành một quá trình diễn ra trên một lớp đối tượng.*

Đây là cách nhìn tổng thể, đi đến cái chung hơn, bao quát hơn với những đặc trưng vốn có từ những bài toán riêng lẻ.

Rèn luyện hoạt động này sẽ khiến học sinh trở nên “nhì xa, trông rộng” hơn, không bị bó hẹp hay trôi buộc, cũng không bị thỏa mãn bởi cái trước mắt mà phải liên tưởng và đi tìm cái có *tầm* cao hơn cái đã đạt được.

**Ví dụ 16:** Tính tích phân

$$I = \int_0^1 3x(x^2 + 1)^5 dx.$$

Đặt

$$t = x^2 + 1$$

$$\Rightarrow dt = 2xdx$$

$$\Leftrightarrow xdx = \frac{dt}{2}$$

Đổi

|   |   |   |
|---|---|---|
| x | 0 | 1 |
| t | 1 | 2 |

cân

$$I = \int_1^2 3t^5 \cdot \frac{dt}{2} = \frac{3}{2} \int_1^2 t^5 dt$$

$$= \frac{3}{2} \left( \frac{t^6}{6} \right) \Big|_1^2 = \frac{63}{4}$$

**Ví dụ 17.** Tính tích phân

$$I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx.$$

Đặt

$$t = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow t^2 = x^2 + 1$$

$$\Rightarrow 2tdt = 2xdx \Leftrightarrow xdx = tdt$$

Đổi

|   |   |            |
|---|---|------------|
| x | 0 | $\sqrt{3}$ |
| t | 1 | 2          |

cân

$$I = \int_1^2 \frac{tdt}{t} = \int_1^2 dt$$

$$= (t) \Big|_1^2 = 1$$

Để giúp học sinh có khả năng trên, giáo viên cần truyền đạt cho học sinh những bài toán đơn lẻ có sự khái quát trong đó, luôn đặt vấn đề để học sinh có sự liên tưởng và đưa ra sự khái quát ấy.

\* Mô tả chính xác quá trình tiến hành một hoạt động.

Ta luôn nhận thấy rằng: Người có giải *tốt* bài toán mới có thể phát biểu thành lời các bước giải toán. Do vậy việc mô tả chính xác quá trình tiến hành một hoạt động nào đó trong việc giải toán thường chỉ xuất hiện ở mỗi người giải được bài toán đó mà thôi.

Đề từ việc đã giải được bài toán đi đến mô tả lại thì học sinh cần lưu ý tới ngôn ngữ nói trong toán học (cách nêu, đọc công thức toán học,...)

**Ví dụ 18.** Tìm nguyên hàm:  $I = \int \frac{dx}{1 + \cos x}$

Để giải bài toán này, ta mô tả quá trình giải diễn ra như sau:

Trước tiên ta biến đổi mẫu thức về dạng quen thuộc nhờ công thức nhân đôi, để có thể sử dụng công thức ấy ta viết lại  $x = 2 \cdot \frac{x}{2}$

Sau đó áp dụng công thức ta dễ dàng tìm được nguyên hàm cần tìm.

Với những gì đã mô tả, ta đi tới thuật toán là:

**bước 1:** Viết lại  $1 + \cos x = 1 + \cos(2 \cdot \frac{x}{2}) = 1 + 2 \cdot \cos^2 \frac{x}{2} - 1 = 2 \cdot \cos^2 \frac{x}{2}$

**bước 2:** Thực hiện phép toán:

$$I = \int \frac{dx}{2 \cdot \cos^2 \frac{x}{2}} = \int \frac{d(\frac{x}{2})}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \tan \frac{x}{2} + C$$

**bước 3:** kết luận  $I = \tan \frac{x}{2} + C$

**Ví dụ 8.** Tìm nguyên hàm:  $I = \int \frac{dx}{1 + e^x}$

Với bài toán dạng này, ta mô tả quá trình diễn ra như sau:

Trước tiên ta tạo ra vi phân của mẫu thức bằng cách nhân cả tử và mẫu với  $e^x$ .

Sau đó dùng phương pháp đổi biến với  $u = e^x$  để đưa về bài toán quen thuộc, hoặc ta có thể phân tích trực tiếp để đưa về bài toán quen thuộc đó.

Cuối cùng vận dụng công thức nguyên hàm để tìm và kết luận.

Những gì đã mô tả ở trên cho ta thuật giải để giải bài toán này như sau:

**bước 1:** Nhân cả tử và mẫu cho  $e^x$  ta được  $I = \int \frac{e^x dx}{e^x(1 + e^x)}$

**bước 2:** Đưa bài toán về bài toán quen thuộc

$$I = \int \frac{e^x dx}{e^x(1 + e^x)} = \int \left[ \frac{1}{e^x} - \frac{1}{e^x + 1} \right] d(e^x)$$

**bước 3:** Tìm nguyên hàm và kết luận  $I = \ln \left| \frac{e^x}{e^x + 1} \right| + C$

Việc mô tả lại một quá trình trong lời giải toán là không dễ cho hầu hết các học sinh, giáo viên cần kiểm tra và hướng dẫn cho học sinh thực hiện tốt khâu này cũng những chú ý cần thiết trong cách đọc, nêu,...quá trình giải ấy.

*\* Phát hiện thuật giải tối ưu để giải quyết bài toán.*

Đây là điều quyết định đến sự tinh tế của người học toán. Làm bất cứ việc gì, ai cũng cần chọn cho mình cách làm *tốt nhất* với hiệu quả công việc cho phép. Và trong toán học cũng vậy, một bài toán có nhiều cách giải nhưng đôi lúc (do yêu cầu) ta cần tìm một cách giải tối ưu hơn (theo khối lượng, thời gian) phục vụ cho một mục đích nào đó của con người.

Do đó, việc rèn luyện cho học sinh những kỹ năng để có thể tìm thuật giải tối ưu cho từng bài toán là một mục đích có ý nghĩa thực tế cao trong đời sống hiện nay. Giúp con người tiết kiệm được chi phí, thời gian và những rủi ro đáng tiếc.

**Ví dụ 20:**  $I = \int \frac{dx}{\sin x}$

Nhận xét rằng: Bài toán này thường khiến cho đa số học sinh giải theo phương pháp sau:

bước 1: Nhân cả tử và mẫu với  $\sin x$  ta được:  $I = \int \frac{\sin x dx}{\sin^2 x}$

bước 2: Đưa về bài toán quen thuộc:

$$I = \int \frac{\sin x dx}{\sin^2 x} = \int \frac{\sin x dx}{1 - \cos^2 x} \text{ với phép đổi biến } u = \cos x \text{ ta được}$$

$$I = \int \frac{du}{1 - u^2}$$

$$\begin{aligned} \text{bước 3: tìm và kết luận: } I &= \int \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} \right] du = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| + C \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + C \end{aligned}$$

Sau đây là một thuật giải để giải bài toán trên theo hướng khác được coi là tối ưu hơn (theo nghĩa đơn giản hơn):

bước 1: biến đổi

$$I = \int \frac{dx}{\sin x} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \int \frac{d(\frac{x}{2})}{\tan \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}}$$

bước 2: Sử dụng công thức nguyên hàm quen thuộc ta dễ dàng tìm được:

$$I = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C$$

Như vậy, học sinh cần chuẩn bị cho mình một khối lượng tri thức cần thiết cùng sự nhạy bén trong cách dùng thì mới có thể tự tìm cho mình một cách giải tối ưu cho từng bài toán cụ thể.

**2.5.2.5. Biện pháp 5: Xây dựng và ứng dụng tư duy thuật giải cho một số dạng bài tập nguyên hàm, tích phân.**

Trong mọi trường hợp của bài toán có thể được, việc đi tìm và ứng dụng các thuật giải là một mục đích thực sự của toán học. Do đó, việc phát hiện ra, xây dựng và ứng dụng tư duy thuật giải vào trong từng bài toán cụ thể là một trong những vấn đề quan trọng để giải lớp các bài toán ngày càng rộng theo một cách thống nhất. Hướng xây dựng một số quy trình có tính chất thuật giải cho một số dạng toán giải phần này. Thông qua việc rèn luyện cho học sinh biết cách xây dựng và vận dụng các quy trình đó thì tư duy thuật giải của các em sẽ được phát triển. Sau đây, tôi xin đưa ra thuật giải một số dạng bài toán thường gặp ở chương trình bậc trung cấp chuyên nghiệp nói riêng và trong chương trình toán phổ thông nói chung như sau.

**1) Thuật giải cho dạng:  $I = \int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}} dx$**

Bước 1: Kiểm tra điều kiện  $x \geq a$  hay  $x < -a$

Bước 2.1: nếu  $x \geq a$  thì

$$I = \int \frac{x-a}{\sqrt{x^2-a^2}} dx = \int \frac{2x \cdot dx}{2\sqrt{x^2-a^2}} - a \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

Kết luận:

$$I = \sqrt{x^2-a^2} - \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + c$$

Ngược lại thì:

Bước 2.2: ( $x < -a$ )

$$I = \int \frac{a-x}{\sqrt{x^2-a^2}} dx = \int a \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} - \int \frac{2x dx}{2\sqrt{x^2-a^2}}$$

Kết luận:

$$I = \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| - \sqrt{x^2-a^2} + c$$

Bước 3. Kết luận.

**2) Thuật giải cho dạng:  $I = \int P(x) \cdot \sin ax \cdot dx$  (hoặc  $J = \int P(x) \cdot \cos ax \cdot dx$ ),  $P(x)$  là một đa thức trong  $R[X]$ .**

Bước 1: Đặt  $I = \int P(x) \cdot \sin ax \cdot dx = A(x) \cdot \sin ax + B(x) \cdot \cos ax + C$

Bước 2: Tính đạo hàm hai vế ta được

$$P(x) \cdot \sin ax = [A'(x) + B(x)] \sin ax + [A(x) + B'(x)] \cos ax$$

Bước 3: Dùng hệ số bất định để tìm  $A(x)$  và  $B(x)$

Bước 4: Kết luận.

**3) Thuật giải cho dạng:  $I = \int P(x) \cdot e^{ax+b} dx$ ,  $P(x)$  là một đa thức trong  $R[X]$ .**

Bước 1: Đặt  $I = \int P(x) \cdot e^{ax+b} dx = Q(x) \cdot e^{ax+b} + C$

Bước 2: Đạo hàm hai vế ta được  $P(x) \cdot e^{ax+b} = [Q'(x) + a \cdot Q(x)] e^{ax+b}$

Bước 3: Dùng phương pháp hệ số bất định để tìm  $Q(x)$

Bước 4: Kết luận.

**4) Thuật giải cho dạng:  $I = \int \frac{x^2}{(ax+b)^n} dx$  với  $a$  khác 0.**

Bước 1: Phân tích  $\frac{x^2}{(ax+b)^n} = \frac{1}{a^2} \frac{(ax+b)^2 - 2b(ax+b) + b^2}{(ax+b)^n}$

$$\text{Khi đó } I = \frac{1}{a^3} \left[ \int \frac{d(ax+b)}{(ax+b)^{n-2}} - 2 \int \frac{bd(ax+b)}{(ax+b)^{n-1}} + \int \frac{b^2 d(ax+b)}{(ax+b)^n} \right]$$

Bước 2: Kiểm tra  $n$

Bước 2.1: Nếu  $n = 1$  thì:

$$\text{Kết luận: } I = \frac{1}{a^3} \left[ \frac{(ax+b)^2}{2} - 2b(ax+b) + b^2 \ln|ax+b| \right] + C$$

sang bước 3.

Bước 2.2: Nếu  $n = 2$  thì:

$$\text{Kết luận: } I = \frac{1}{a^3} \left[ (ax+b) - 2b \ln|ax+b| - \frac{b^2}{ax+b} \right] + C$$

sang bước 3.

Bước 2.3: Nếu  $n = 3$  thì:

$$\text{Kết luận: } I = \frac{1}{a^3} \left[ \ln|ax+b| + \frac{2b}{ax+b} - \frac{b^2}{2(ax+b)^2} \right] + C$$

sang bước 3.

Bước 2.4: Nếu  $n \in \mathbb{R} \setminus \{1; 2; 3\}$  thì

$$\text{Kết luận: } I = \frac{1}{a^3} \left[ \frac{(ax+b)^{3-n}}{3-n} - \frac{2b(ax+b)^{2-n}}{2-n} + \frac{b^2(ax+b)^{1-n}}{1-n} \right] + C$$

sang bước 3.

Bước 3: Kết luận.

**5) Thuật giải cho dạng:  $I = \int \frac{dx}{\sin(x+a) \cdot \sin(x+b)}$**

**AP giải**

Bước 1: Sử dụng đồng nhất thức:  $1 = \frac{\sin(a-b)}{\sin(a-b)} = \frac{\sin[(x+a)-(x+b)]}{\sin(a-b)}$

Bước 2: Khai triển:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{\sin(x+a) \cdot \sin(x+b)} = \frac{1}{\sin(a-b)} \int \frac{\sin[(x+a)-(x+b)]}{\sin(x+a) \cdot \sin(x+b)} dx \\ &= \frac{1}{\sin(a-b)} \int \frac{\sin(x+a) \cdot \cos(x+b) - \cos(x+a) \cdot \sin(x+b)}{\sin(x+a) \cdot \sin(x+b)} dx \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)} \left[ \int \frac{\cos(x+b)dx}{\sin(x+b)} - \int \frac{\cos(x+a)dx}{\sin(x+a)} \right]$$

Bước 3: Kết luận:  $I = \frac{1}{\sin(a-b)} \ln \left| \frac{\sin(x+b)}{\sin(x+a)} \right| + C$

Nhận xét rằng: Thuật giải trên được áp dụng cho cả những dạng :

$$J = \int \frac{dx}{\cos(x+a)\cos(x+b)} ; L = \int \frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)}$$

**6) Thuật giải cho dạng:  $I = \int \frac{dx}{\sin x + \sin a}$**

Nhận xét: Dạng toán này so với dạng toán 5) chỉ sai khác một phép biến đổi nhờ công thức biến đổi tổng thành tích. Do đó ta có thuật giải cho dạng toán này như sau:

Bước 1: Biến đổi:  $I = \int \frac{dx}{\sin x + \sin a} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin \frac{x+a}{2} \cos \frac{x-a}{2}}$

Bước 2: (xem Bước 1 của thuật giải 5, tr.77)

Bước 3: (xem Bước 2 của thuật giải 5, tr.77)

Bước 4: (xem Bước 3 của thuật giải 5, tr.77)

*Sau này nào?*

#### 2.4.2.6. Biện pháp 6: Sử dụng hợp lý hình thức dạy học phân hóa

Sử dụng hợp lý hình thức dạy học phân hoá (nội tại) nhằm kích thích mỗi học sinh học tập với sự nỗ lực trí tuệ phù hợp với trình độ và năng lực nhận thức của bản thân.

Dạy học phân hoá xuất phát từ sự biện chứng của thống nhất và phân hoá, từ yêu cầu đảm bảo thực hiện tốt các mục tiêu dạy học đối với tất cả mọi học sinh là đào tạo con người lao động tự chủ, năng động, sáng tạo, tạo điều kiện cho mỗi thành viên hoạt động trong một lĩnh vực phù hợp với năng lực cá nhân, khai thác tiềm năng, tạo điều kiện tối ưu cho sự phát triển năng lực của họ.

Phân hoá nội tại (còn gọi là phân hoá trong), tức là dùng những biện pháp phân hoá thích hợp trong một lớp học thống nhất với cùng một kế hoạch học tập, cùng một chương trình và sách giáo khoa.

Để việc dạy học phân hoá theo hướng phát triển tư duy thuật giải đạt hiệu quả cao đòi hỏi phải xác định được mức độ tập luyện sát sao với trình độ học sinh. Muốn vậy cần phải thực hiện phân bậc hoạt động tư duy thuật giải. Sự phân bậc hoạt động dựa vào các căn cứ sau:

##### a. Phân bậc theo bình diện nhận thức

Đặc tính cụ thể hay trừu tượng của đối tượng là một căn cứ để phân bậc hoạt động tư duy thuật giải.

a1. Bậc thấp: Tiến hành hoạt động trên những đối tượng cụ thể.

a2. Bậc cao: Tiến hành hoạt động tư duy thuật giải trên đối tượng trừu tượng hơn.

**Ví dụ 21.** Tính tích phân  $I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$

Đây là một trong những bài tập được đề cập trong sách giáo khoa, do đó việc giải nó hoàn toàn không khó. Tuy nhiên để nhìn nhận và đánh giá tốt hơn về sự tiếp thu của học sinh cần thông qua việc học sinh nêu ra thuật giải của bài toán này.

Bây giờ ta sẽ viết thuật toán để giải bài toán này như sau:

**bước 1:** Đặt  $x = \tan t$

**bước 2:** Đổi cận và đưa biểu thức trong tích phân về biến mới  $t$

$$\text{Ta có : } dx = d(\tan t) = \frac{1}{\cos^2 t} dt$$

$$\text{với } x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4} ; x = 0 \Rightarrow t = 0$$

$$\text{Suy ra } I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + \tan^2 t} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt$$

**bước 3:** Tính và kết luận.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + \tan^2 t} (1 + \tan^2 t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Vậy } I = \frac{\pi}{4}$$

**Ví dụ 22.** Tính tích phân  $J = \int_0^a \frac{1}{a^2 + x^2} dx$  với  $a > 0$ .

Với bài toán như ví dụ 1 trên có lẽ là không khó, tuy vậy với bài toán tổng quát hơn có thể sẽ khiến học sinh không thể bao quát hoặc nhìn nhận bài toán còn nhiều thiếu sót. Ví như trong ví dụ này thì học sinh sẽ ngộ nhận việc đổi biến cũng là  $x = \tan t$ ; điều này sẽ khiến bài toán đi vào bế tắc, với những học sinh nhầm lẫn như trên có lẽ chưa thực sự hiểu mục đích của việc đổi biến số ở đây là gì. Bài toán này sẽ khiến học sinh chú ý nhiều hơn về giá trị  $a$ , với những học sinh khá và hiểu sâu sắc về ví dụ 1 thì việc cho ta thuật giải của ví dụ 2 không thực sự khó. Bài toán tổng quát hơn này có thuật giải như sau:

**bước 1:** Đặt  $x = a \cdot \tan t$

**bước 2:** Đổi cận và đưa bài toán về biến mới  $t$ .

$$\text{suy ra } dx = a(1 + \tan^2 t) dt \text{ và với } x = a \text{ thì } t = \frac{\pi}{4}; \text{ với } x = 0 \text{ thì } t = 0.$$

$$\text{Khi đó } I = \frac{1}{a} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + \tan^2 t} (1 + \tan^2 t) dt$$

**bước 3:** Tính và kết luận

$$I = \frac{1}{a} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + \tan^2 t} (1 + \tan^2 t) dt = \frac{1}{a} \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = \frac{\pi}{4a}$$

Nhận thấy rằng đây là bài toán tổng quát hơn nhưng không mấy khó hơn so với bài toán trước.

### ***b. Phân bậc theo nội dung của hoạt động tư duy thuật giải***

Các hoạt động tư duy thuật giải có thể được phân bậc dựa trên nội dung của hoạt động. Nội dung của hoạt động là những tri thức liên quan tới hoạt động và những điều kiện khác của hoạt động.

b<sub>1</sub>. Bậc thấp: Mô tả thuật giải bằng ngôn ngữ toán học:

b<sub>2</sub>. Bậc cao: Mô tả thuật giải bằng ngôn ngữ sơ đồ khối hoặc ngôn ngữ phông trình.

Bậc cao hơn nữa: Mô tả thuật giải bằng ngôn ngữ lập trình.

Cũng thông qua điều này giúp học sinh đánh giá được mức độ thực hiện một thuật giải cho bài toán của từng học sinh, từ đây bồi dưỡng và rèn luyện thêm cho học sinh trong quá trình dạy học giải bài tập, nhằm nâng cao tư duy thuật giải góp phần phát triển tư duy nói chung cho học sinh.

### ***c. Phân bậc theo sự phức hợp của hoạt động tư duy thuật giải***

Sự phức hợp của hoạt động cũng là một căn cứ để phân bậc các hoạt động tư duy thuật giải.

c<sub>1</sub>. Bậc thấp: Xây dựng một thuật giải.

c<sub>2</sub>. Bậc cao: Xây dựng thuật giải tối ưu hơn.

**Ví dụ 23.** Tính tích phân sau:  $I = \int (A.\sin x + B.\cos x + C).e^x .dx$

Thoạt nhìn bài toán này, có lẽ đa số học sinh sẽ sử dụng phương pháp từng phần để giải và cho ta thuật toán như sau:

bước 1: phân tích  $I = A \int \sin x .e^x dx + B \int \cos x .e^x dx + C \int e^x dx$

bước 2: Tính từng tích phân

bước 3: Kết luận

Nhận xét rằng: với cách giải như trên chúng ta có thể thấy một sự kông kênh và chưa thực sự tối ưu. Không những vậy việc thực hiện trên cho thuật giải không thực sự tốt.

Bây giờ ta sẽ tìm một thuật giải tốt hơn, tối ưu hơn như sau:

Dễ thấy rằng bài toán trên có biểu thức trong tích phân là:  $P(x).e^x$ ,

do tích chất đạo hàm của  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$  nên :

$$I = \int (A.\sin x + B.\cos x + C).e^x .dx = (A_1 \sin x + B_1 \cos x + C_1)e^x + C$$

Bằng phương pháp hệ số bất định ta hoàn toàn có thể tìm được:

$$A_1 = \frac{A+B}{2}; B_1 = \frac{B-A}{2}; C_1 = C.$$

Với sự nhìn nhận như trên, thì thuật toán tối ưu để giải dạng bài toán này là:

bước 1: Đặt  $I = (A_1 \sin x + B_1 \cos x + C_1)e^x + C$

**bước 2:** Tìm  $A_1, B_1, C_1$  bằng phương pháp hệ số bất định ta được:

$$A_1 = \frac{A+B}{2}; B_1 = \frac{B-A}{2}; C_1 = C.$$

**bước 3:** kết luận  $I = \left(\frac{A+B}{2}\sin x + \frac{B-A}{2}\cos x + C\right)e^x + C$

Chúng ta thấy rằng, rõ ràng thuật giải vừa rồi thực sự tốt hơn nhiều, nó ngắn gọn, đơn giản, dễ kiểm tra.

Trong nhiều lĩnh vực, nhất là lĩnh vực kinh tế thì việc tìm phương án tối ưu để giải quyết vấn đề là một việc làm mà người ta đặc biệt quan tâm. Do đó việc rèn luyện học sinh tìm ra một thuật giải tối ưu trong toán học sẽ góp phần tạo sự tinh tế khi giải quyết vấn đề ở một số lĩnh vực khác.

Cũng với cách nhìn tương tự, sau đây cũng là một ví dụ làm nổi bật yếu tố tối ưu trong khi giải quyết vấn đề:

**Ví dụ 24.** Tìm nguyên hàm:  $J = \int P(x).e^x dx$  với  $P(x)$  là đa thức bậc  $n$  trên  $R[X]$

Nhận xét rằng: Đây là một dạng bài toán đã đề cập trong sách giáo khoa với những bài toán cụ thể, chưa mang tính tổng quát mà thường được học sinh giải theo phương pháp tích phân từng phần. Những bài toán ấy mới chỉ khảo sát với  $P(x)$  là hàm bậc nhỏ hơn 3, nếu với phương pháp từng phần này thì hàm  $P(x)$  bậc  $n$  sẽ có tới  $n$  lần từng phần, đây là điều khó chấp nhận cho bài toán có thuật giải tối ưu.

Cũng như ví dụ trên, bài toán này có thuật giải tối ưu như sau:

**bước 1:** Đặt  $J = Q(x)e^x$  với  $Q(x)$  và  $P(x)$  là các đa thức cùng bậc

**bước 2:** Dùng phương pháp hằng số bất định để tìm  $Q(x)$

**bước 3:** kết luận

*Có thể phân bậc sự phức hợp của hoạt động tư duy thuật giải theo căn cứ:*

Bậc thấp: Biết cách làm trên một loạt trường hợp tương tự với trường hợp đã làm.

Bậc cao: Khái quát hoá cách làm trên các trường hợp cụ thể thành cách làm cho trường hợp tổng quát.

**Ví dụ 25.** Ta có thể thông qua việc tìm các nguyên hàm sau

a. Tìm nguyên hàm:  $I = \int \frac{dx}{(x+2)^2}$

Đây là bài toán dễ đối với hầu hết các học sinh.

Dễ dàng ta có thuật giải như sau:

**bước 1:** Viết lại  $I = \int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2}$

**bước 2:** Áp dụng công thức ta tìm được  $I = \frac{-1}{x+2} + C$

b. Tìm nguyên hàm:  $J = \int \frac{dx}{x^2+3}$

Cũng như bài toán I, đây là bài không thực sự khó đối với đa số các học sinh.

Với phép đổi biến  $x = \sqrt{3} \tan t$  Ta có thuật giải là:

bước 1; Đặt  $x = \sqrt{3} \tan t$

bước 2: đưa bài toán về  $J = \frac{1}{\sqrt{3}} \int dt$

bước 3: Ta tìm được  $J = \frac{\sqrt{3}t}{3} + C$ , với  $t = \arctan \frac{x}{\sqrt{3}}$

c. Tìm nguyên hàm:  $K = \int \frac{dx}{(x+1)^2 - 4}$

Không khó hơn nhiều so với hai bài nguyên hàm trên, học sinh dễ dàng đưa ra thuật giải như sau:

bước 1: Phân tích bài toán về dạng quen thuộc:

$$K = \int \frac{dx}{(x+1)^2 - 4} = \int \frac{dx}{[(x+1)-2][(x+1)+2]} = \frac{1}{4} \int \left[ \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x-1} \right] dx$$

bước 2: Thực hiện phép toán ta được  $K = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x+3}{x-1} \right| + C$

Với 3 bài toán trên là 3 trường hợp của bài toán sau đây:

d. Tìm nguyên hàm:  $L = \int \frac{dx}{a.x^2 + b.x + c}$

Sau khi khảo sát trên các trường hợp riêng lẻ (các bài I; J; K) học sinh có thể khái quát thành trường hợp tổng quát hơn, bao hàm các trường hợp riêng đã khảo sát.

Việc làm trên giúp học sinh có cách nhìn nhận tổng thể về một bài toán, sự suy lý và liên hệ của các trường hợp để quy về một khối tổng thể. Trong cuộc sống, không chỉ học tập mà trong công việc người có cách đánh giá suy tưởng như trên sẽ rất nhanh chóng giải quyết vấn đề lớn, vấn đề chung hơn và tiến tới thành công hơn trong cuộc sống. Bài toán trên đã được trình bày thuật giải trong mục 1.2.3.3, tr.16.

#### **d. Phân bậc theo chất lượng của hoạt động tư duy thuật giải**

Sự phân bậc các hoạt động tư duy thuật giải còn dựa trên chất lượng của hoạt động.

d<sub>1</sub>. Bậc thấp: Biết tiến hành hoạt động tư duy thuật giải.

d<sub>2</sub>. Bậc cao: Có kỹ năng tiến hành hoạt động tư duy thuật giải.

d<sub>3</sub>. Bậc cao hơn nữa: Có kỹ xảo tiến hành hoạt động tư duy thuật giải.

Cách khác:

Bậc thấp: Tiến hành hoạt động tư duy thuật giải với sự giúp đỡ của giáo viên.

Bậc cao: Độc lập tiến hành hoạt động tư duy thuật giải.

**Ví dụ 26.** Tính tích phân  $I = \int_1^2 \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{x + \frac{1}{x}} dx$

Đối với bài toán này chỉ cần sự hướng dẫn đặt  $u = x + \frac{1}{x}$  là học sinh có thể thực hiện thuật giải một cách dễ dàng:

**Q** bước 1: Đặt  $u = x + \frac{1}{x} \Rightarrow du = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)dx$

**Q** bước 2: Đổi cân và đưa bài toán về biến mới

với  $x = 1$  thì  $u = 2$ ;  $x = 2$  thì  $u = \frac{5}{2}$

bài toán đưa về :  $I = \int_2^{\frac{5}{2}} \frac{du}{u} = \ln|u| \Big|_2^{\frac{5}{2}}$

**Q** bước 3: kết luận  $I = \ln \frac{5}{4}$

Bài toán trên là không khó đối với đa số học sinh, nhưng việc giải nó theo một thuật giải sẽ giúp học sinh thực hiện tốt hoạt động tư duy thuật giải (T<sub>1</sub>). PP

**Ví dụ 27.** Tính tích phân  $J = \int_1^2 \frac{x^2 - 1}{x^4 + x^2 + 1} dx$  PP

Đứng trước bài toán này, đa số học sinh tự tìm ra thuật giải thì sẽ khó, nhưng nếu được hướng dẫn bởi một thao tác **Q** chia cả tử và mẫu cho  $x^2$  thì bài toán đã có lời giải chắc chắn.

Như vậy, để có thể có lời giải để giải bài toán này (theo một thuật giải) thì học sinh cần có những kỹ năng, kỹ xảo biến đổi và thực hiện các thao tác thuật giải.

Cũng như ví dụ trước, bài toán này chỉ sai khác một phép biến đổi và thuật giải để giải bài toán này là:

**Q** bước 1: Chia cả tử và mẫu cho  $x^2$  ta đưa bài toán về

$$I = \int_1^2 \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 1} dx$$

khi đó với cách đặt như ví dụ trên ta có :

**Q** bước 2: đặt  $u = x + \frac{1}{x} \Rightarrow du = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)dx$  và bài toán được đưa về dạng quen thuộc:

$$I = \int_2^{\frac{5}{2}} \frac{du}{u^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| \Big|_2^{\frac{5}{2}}$$

**Q** bước 3: tính và kết luận  $I = \frac{1}{2} \ln \frac{9}{7}$

Sự phân bậc các hoạt động tư duy thuật giải giúp cho giáo viên nắm bắt được tình hình hoạt động toán học của học sinh trong quá trình dạy học giải toán nguyên hàm, tích phân và ứng dụng. Trên cơ sở nhận thức của học sinh để giáo viên lựa chọn các hoạt động phát triển tư duy thuật giải phù hợp với trình độ nhận thức của học sinh.

Bài tập tương tự: Tính các tích phân sau đây

a)  $\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^3} dx$     b)  $I = \int_0^1 \frac{3x^2}{x^3+1} dx$ ;    c)  $\int_0^2 \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx$ ;

d)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \cos x dx$     e)  $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$ ;    f)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1) \sin x dx$

Tóm lại, trong quá trình dạy học cho học sinh, giáo viên nên có một số biện pháp nhằm nâng cao ứng dụng tư duy cho học sinh và trong đó có tư duy thuật giải. Giáo viên cần phải có các nguyên tắc dạy học theo hướng phát triển tư duy thuật giải và dựa trên hệ thống các nguyên tắc đó đề ra các định hướng phát triển tư duy thuật giải cho học sinh ứng dụng thông qua dạy học giải bài tập nguyên hàm, tích phân. Để phát triển tư duy thuật giải cho học sinh đạt hiệu quả cao đòi hỏi người giáo viên phải có kỹ năng sư phạm, có nghệ thuật biến quá trình dạy học nói chung thành một hệ thống làm việc định hình, có tổ chức, kiểm soát chặt chẽ các hoạt động Toán học của học sinh mang tính thuật giải cũng như xây dựng thuật giải. Một trong những yếu tố hình thành và phát triển tư duy thuật giải cho học sinh có hiệu quả là trong quá trình dạy học giáo viên phải xây dựng được các quy trình dạy học theo hướng phát triển tư duy thuật giải, cho học sinh hoạt động, ứng dụng tích cực trong các tình huống dạy học đó. Như vậy, việc phát triển tư duy thuật giải cho học sinh ứng dụng trong quá trình dạy học môn Toán nói chung và dạy học giải bài tập nguyên hàm tích phân nói riêng là hết sức quan trọng. Nó giúp chúng ta đạt được mục đích của giáo dục và yêu cầu của xã hội đặt ra.

## 2.6. Kết luận

Sáng kiến kinh nghiệm sử dụng những kiến thức khoa học cơ bản. Nội dung nguyên hàm, tích phân được vận dụng trong chương trình Toán 4 (trong chương trình cũ dành cho các học sinh hệ trung cấp chuyên nghiệp khóa 15 và khóa 16) và hiện nay nằm trong chương trình Toán 6 được áp dụng bắt đầu từ khóa 17T4 và nội dung thi tốt nghiệp văn hóa bậc trung cấp chuyên nghiệp. Trong quá trình giảng dạy vận dụng một số biện pháp tích cực nâng cao năng lực ứng dụng tư duy thuật giải trong dạy học chủ đề Nguyên hàm Tích phân cho học sinh hệ trung cấp chuyên nghiệp. Kết quả thu được sau khi tôi giảng dạy các lớp khóa 16TCN trong học kỳ 1 năm học 2016-2017, và các lớp ôn thi tốt nghiệp môn toán năm học 2018-2019; lớp ôn thi tốt nghiệp môn toán khóa 18T2 đợt thi tháng 8 năm học 2019-2020 đã cho thấy những tác dụng tích cực đối với người học. Học sinh dễ dàng tiếp thu và làm tốt các bài tập nguyên hàm, tích phân; biết vận dụng vào trong thực tiễn và tránh được một số sai lầm trong quá trình giải bài toán liên quan đến nguyên hàm, tích phân bằng các biện pháp tích cực ứng dụng tư duy thuật giải tôi thấy các em học sinh có thái độ tích cực hơn đối với chủ đề nguyên hàm, tích phân nói riêng và môn toán nói chung.

## 3. Kết quả áp dụng Sáng kiến:

Sau khi áp dụng đổi mới phương pháp giảng dạy nêu trên đã mang lại hiệu quả như sau:

- Áp dụng thử lần đầu tại các lớp do bản thân phụ trách giảng dạy thuộc khóa 16TCN, từ tuần 7 đến tuần 12 của học kỳ 2 năm học 2016-2017. Kết quả sau khi áp dụng, tỷ lệ học sinh thuộc các lớp này trong bài kiểm tra thường xuyên đạt điểm kiểm tra trên trung bình là 80%.

- Áp dụng chính thức tại các lớp do bản thân phụ trách giảng dạy ôn thi tốt nghiệp thuộc khóa 18T2 năm học 2019-2020. Kết quả sau khi áp dụng, tỷ lệ học sinh ở các lớp ôn thi tốt nghiệp đạt kết quả trên trung bình chiếm tỷ lệ trên là 90%, tăng 10% so với khi áp dụng thử lần đầu.

#### **4. Mức độ lợi ích xã hội mang lại trong năm áp dụng:**

Một số biện pháp tích cực nâng cao năng lực ứng dụng tư duy thuật giải trong dạy học chủ đề Nguyên hàm Tích phân cho học sinh hệ trung cấp chuyên nghiệp cùng với việc áp dụng đổi mới phương pháp giảng dạy học của học sinh theo tiến trình đã đề xuất. Qua kiểm nghiệm thực sự đã đem lại hiệu quả trong việc nâng cao kiến thức và phát triển tư duy, sáng tạo cho học sinh. Nội dung sáng kiến phù hợp với xu thế dạy học, đảm bảo đánh giá kết quả học tập của học sinh bậc trung cấp chuyên nghiệp.

Qua quá trình kiểm nghiệm và kết quả thực hiện tôi thấy có thể đưa các biện pháp tích cực nâng cao năng lực ứng dụng tư duy thuật giải trong dạy học chủ đề Nguyên hàm, Tích phân cho học sinh hệ trung cấp chuyên nghiệp giảng dạy ở trường Cao Đẳng Lý Tự Trọng hiện nay nhằm góp phần phát triển được tư duy, sáng tạo cho học sinh bậc Trung cấp chuyên nghiệp và góp phần đổi mới phương pháp dạy học và nâng cao chất lượng dạy học ở trường Cao Đẳng Lý Tự Trọng.

#### **5. Đơn vị áp dụng sáng kiến:**

Sáng kiến kinh nghiệm được áp dụng cho việc dạy học cho học sinh trình độ bậc trung cấp chuyên nghiệp tại trường Cao Đẳng Lý Tự Trọng thành phố Hồ Chí Minh.

#### **6. Đánh giá phạm vi ảnh hưởng của Sáng kiến:**

- ☒ Chỉ có hiệu quả trong phạm vi Đơn vị áp dụng.
- ☐ Đã được chuyển giao, nhân rộng việc áp dụng ra phạm vi sở, ngành theo chứng cứ đính kèm.
- ☐ Đã phục vụ rộng rãi người dân trên địa bàn Thành phố, hoặc đã được chuyển giao, nhân rộng việc áp dụng trên địa bàn Thành phố theo chứng cứ đính kèm.
- ☐ Đã phục vụ rộng rãi người dân tại Việt Nam, hoặc đã được chuyển giao, nhân rộng việc áp dụng tại nhiều tỉnh, thành theo chứng cứ đính kèm.

**Bộ phận/Đơn vị áp dụng**

*TP. Hồ Chí Minh, ngày 20 tháng 12 năm 2019*

**Người viết sáng kiến**

**Nguyễn Thị Thủy**